ДИСКУССИИ И РЕЦЕНЗИИ

А. Л. ДОРОЖИНСКИЙ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВЕСОВ ПОПЕРЕЧНЫХ ПАРАЛЛАКСОВ, ИЗМЕРЕННЫХ НА СТЕРЕОКОМПАРАТОРЕ

Определение элементов взаимного ориентирования (ЭВО) по поперечным параллаксам, измеренным на шести стандартных точках (рис. 1), давно уже не удовлетворяет требованиям аналитической фототриангуляции. В отечественной и зарубежной литературе встречаются рекомендации увеличить число точек до 12—30. Вполне ясно, что в таких случаях ЭВО определяются с помощью способа наименьших квадратов.

Используемые методы весьма разнообразны, но одним из наиболее точных для планового случая съемки является метод А. Н. Лобанова [3].

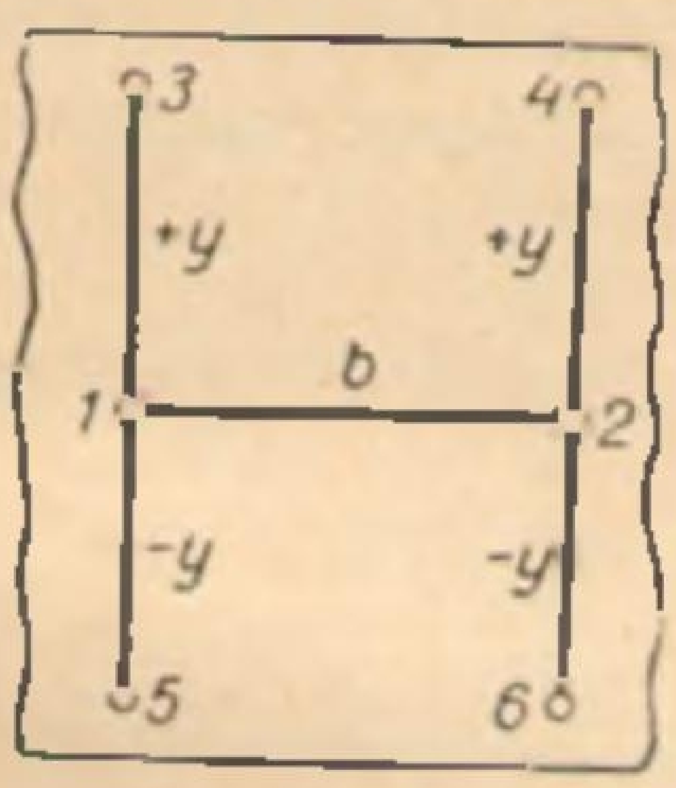

Рис. 1. Стандартное расположение точек при определении элементов взаимного ориентирования.

В этом случае составленные уравнения ошибок типа

$$\frac{xy'}{f}c_1 - \frac{x'y}{f}c_1' - \left(f + \frac{yy'}{f}\right)c_2' + xb_1 - x'b_1' + q = v \qquad (1)$$

решают при условии $[\bar{p}vv] = \min$.

Здесь x, y — координаты точки на левом снимке;

x', y' — координаты точки на правом снимке;

f — фокусное расстояние аэрокамеры;

$c_1, c_1', c_2', b_1, b_1'$ — неизвестные направляющие косинусы;

q — поперечный параллакс, измеренный на стереокомпараторе;

$\bar{p}$ — априорный вес измеренного параллакса.

Вопрос о приписывании весов измеренным поперечным параллаксам не получил должного отражения в литературе. Встречаются лишь отдельные высказывания [2, 3], которые связывают веса только с качеством фотоизображения, и рекомендуют придавать параллаксам точек *1* и *2* (рис. 1) вес, равный двум, а параллаксам точек *3, 4, 5, 6* — равный единице. На наш взгляд, определение веса параллакса, как степени доверия, должно иметь некоторое теоретическое обоснование.

В настоящей работе автор ставит цель исследовать зависимость веса параллакса от местоположения точки на снимке, а также наметить возможные пути окончательного решения задачи по определению весов параллаксов.

Известно, что поперечный параллакс является функцией ЭВО и координат точек. В случае плановой аэрофотосъемки местности с небольшим колебанием рельефа эта зависимость имеет вид:

$$q = -\frac{xy'}{f}\alpha + \frac{x'y}{f}\alpha' + \left(f + \frac{yy'}{f}\right)\omega' - x\varkappa + x'\varkappa', \qquad (2)$$

где $\alpha, \alpha', \omega', \varkappa, \varkappa'$ — элементы взаимного ориентирования.

Так как предстоит решить задачу зависимости веса параллакса от местоположения точки, необходимо отметить, что переменными величинами, входящими в уравнение (2), будем считать координаты x, y, x', y'. Ясно, что для одной и той же стереопары элементы взаимного ориентирования и фокусное расстояние неизменны.

Применим к формуле (2) классический метод нахождения веса функции, известный из теории ошибок [1]:

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{\mu^2}\left[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2+\left(\frac{\partial q}{\partial x'}\right)_0^2 m_{x'}^2+\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2+\left(\frac{\partial q}{\partial y'}\right)_0^2 m_{y'}^2\right], \tag{3}$$

где $\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial q}{\partial x'}\right)_0$, $\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial q}{\partial y'}\right)_0$ — частные производные функции (2) по соответствующей переменной;

m_x, m_x', m_y, m_y' — средние квадратические ошибки определения координат;

μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса.

Подставляя в выражение (3) значения частных производных функции (2), получим:

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{\mu^2}\left[\left(\frac{y'}{f}\alpha+\varkappa\right)^2 m_x^2+\left(\frac{y}{f}\alpha'+\varkappa'\right)^2 m_{x'}^2+\left(\frac{x'}{f}\alpha'+\frac{y'}{f}\omega'\right)^2 m_y^2+\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{x}{f}\alpha+\frac{y}{f}\omega'\right)^2 m_{y'}^2\right]. \tag{4}$$

Итак, вес параллакса будет известен, если известны приближенные значения ЭВО и средние квадратические ошибки определения координат.

В практике весьма удобно пользоваться не весами, вычисленными по формуле (4), а соотношением весов $g=\frac{p_i}{p_1}$, где p_i выражается формулой (4), а p_1 — вес начальной точки, равный единице. Примем за начальную точку 1 стандартной схемы. Подставляя значения координат точки 1 $x=y=y'=0$, $x'=-b$ (b — базис съемки в масштабе снимка) в выражение (4), получим:

$$\frac{1}{p_1}=\frac{1}{\mu^2}\left[\varkappa^2 m_{x_1}^2+\varkappa'^2 m_{x'_1}^2+\frac{b^2}{f^2}\alpha'^2 m_{y_1}^2\right]. \tag{5}$$

Составим соотношение:

$$g=\frac{p_i}{p_1}=\frac{1}{p_1}:\frac{1}{p_i}=\frac{\varkappa^2 m_{x_1}^2+\varkappa'^2 m_{x'_1}^2+\frac{b^2}{f^2}\alpha'^2 m_{y_1}^2}{\left(\frac{y'}{f}\alpha+\varkappa\right)^2 m_x^2+\left(\frac{y}{f}\alpha'+\varkappa'\right)^2 m_{x'}^2+\cdots}$$
$$\overline{\cdots+\left(\frac{x'}{f}\alpha'+\frac{y'}{f}\omega'\right)^2 m_y^2+\left(-\frac{x}{f}\alpha+\frac{y}{f}\omega'\right)^2 m_{y'}^2}. \tag{6}$$

Для окончательного решения поставленной задачи предположим, что средние квадратические ошибки одинаковы по всему снимку: $m_{x_{i,1}}=m_{x_{i',1}}=m_{y_{i,1}}=m'_{y_{i,1}}$. Тогда формула (7) представит зависимость веса параллакса только от местоположения (координат) точки:

$$g=\frac{\varkappa^2+\varkappa'^2+\frac{b^2}{f^2}\alpha'^2}{\left(\frac{y'}{f}\alpha+\varkappa\right)^2+\left(\frac{y}{f}\alpha'+\varkappa'\right)^2+\left(\frac{x'}{f}\alpha'+\frac{y'}{f}\omega'\right)^2+\left(-\frac{x}{f}\alpha+\frac{y}{f}\omega'\right)^2}. \tag{7}$$

В табл. 1 в качестве примера представлены вычисленные по формуле (7) веса для различных точек при различных фокусных расстояниях и базисах (при $\alpha=\alpha'=\varkappa=\varkappa'=\omega'$).

Вообще говоря, средние квадратические ошибки $m_x, m_{x'}, m_y, m_{y'}$ не являются постоянными при переходе от точки к точке. Они включают в себя: ошибки построения снимка, ошибки измерений и ошибки определения элементов внутреннего ориентирования (координат главной точки). Эти ошибки в равной степени присущи как координатам точки, так и параллаксу.

Ошибки построения и измерения снимка, как правило, увеличиваются по мере удаления от центра снимка (например, падение разрешающей способности на краях снимка, и, следовательно, увеличение ошибки измерения, увеличение дисторсии при удалении от центра снимка и т. д.).

Соотношение весов параллаксов для случая $\alpha = \alpha' = \varkappa = \varkappa' = \omega'$ (при $p_1 = 1$)

b, *мм*	f, *мм*	Значения g при $x = 0$ $y \neq 0$				
		$y = 40$ *мм*	$y = 50$ *мм*	$y = 60$ *мм*	$y = 70$ *мм*	$y = 80$ *мм*
40	55	0,39	0,30	0,24	0,20	0,17
	70	0,42	0,36	0,30	0,25	0,22
	100	0,55	0,45	0,38	0,34	0,30
	200	0,70	0,63	0,58	0,55	0,50
50	55	0,44	0,34	0,28	0,23	0,19
	70	0,47	0,39	0,32	0,27	0,23
	100	0,56	0,47	0,40	0,33	0,31
	200	0,70	0,64	0,59	0,55	0,51
60	55	0,46	0,39	0,32	0,27	0,22
	70	0,51	0,42	0,35	0,30	0,26
	100	0,58	0,49	0,43	0,38	0,32
	200	0,71	0,64	0,60	0,55	0,52
70	55	0,53	0,44	0,36	0,30	0,26
	70	0,55	0,46	0,39	0,34	0,28
	100	0,59	0,52	0,45	0,39	0,35
	200	0,71	0,66	0,61	0,55	0,52
80	55	0,58	0,49	0,41	0,34	0,29
	70	0,60	0,51	0,42	0,37	0,31
	100	0,63	0,55	0,48	0,42	0,37
	200	0,72	0,68	0,62	0,57	0,53

Неодинаковые условия измерений координат и параллакса вызывают неравноточность результатов измерений. Следовательно, для получения правильного веса параллакса необходимо в формулу (6) подставлять конкретные значения средних квадратических ошибок для каждой точки.

Выявление общей закономерности в их распределении по всему полю снимка — задача весьма сложная. Если ошибки построения, как правило, увеличиваются при удалении от центра снимка, то ошибки измерений могут такой тенденции не выявлять. Например, ошибка измерения зависит от оптической плотности изображения, а последняя связана в основном со спектральной отражательной способностью точки местности.

Поэтому, как нам представляется, нахождение общей закономерности в распределении ошибок $m_{x',y}$, $m_{x'',y}$ возможно лишь при проведении больших экспериментальных работ с привлечением для обработки полученных результатов методов математической статистики.

В приведенном здесь способе априорного определения веса предлагается учитывать все факторы, влияющие на вес точки. Не следует забывать, что вес параллакса является только следствием веса точки (координат). Поэтому предложенный переход к формуле (2) от выражения $q = y - y'$ представляется возможным, так как он базируется на объективной характеристике — степени доверия к точке и не упускает весьма важной математической характеристики — местоположения точки на снимке. Фактически предлагается расширить анализ точности определения параллакса до анализа возможной точности определения координат точки.

Предложенный метод назовем посредственным методом априорного определения веса параллакса (посредством анализа снимка получаем вес параллакса).

Остановимся кратко на втором возможном методе определения веса параллакса. Назовем его непосредственным и отметим, что существенного различия между этими методами нет.

При непосредственном методе необходимо учесть все те же факторы, что и в первом (например, положение точки на снимке, разрешающая способность, дисторсия, масштаб изображения в точке и т. д.). Число этих факторов равно k.

В качестве исходной функции для непосредственного метода возьмем многочлен вида:

$$q = \pm q_{\mathrm{I}} \pm q_{\mathrm{II}} \pm q_{\mathrm{III}} \pm \cdots \pm q_k, \tag{8}$$

где $q_{\mathrm{I}}, q_{\mathrm{II}}, \ldots, q_k$ — поперечный параллакс, вызванный влиянием каждого из k-факторов.

Тогда вес функции (8) определяется:

$$\frac{1}{g_q} = \frac{1}{g_{\mathrm{I}}} + \frac{1}{g_{\mathrm{II}}} + \cdots + \frac{1}{g_k}, \tag{9}$$

причем под весом g следует понимать соотношение весов, то есть при анализе каждого отдельного фактора производить сравнение весов двух точек, текущей и начальной.

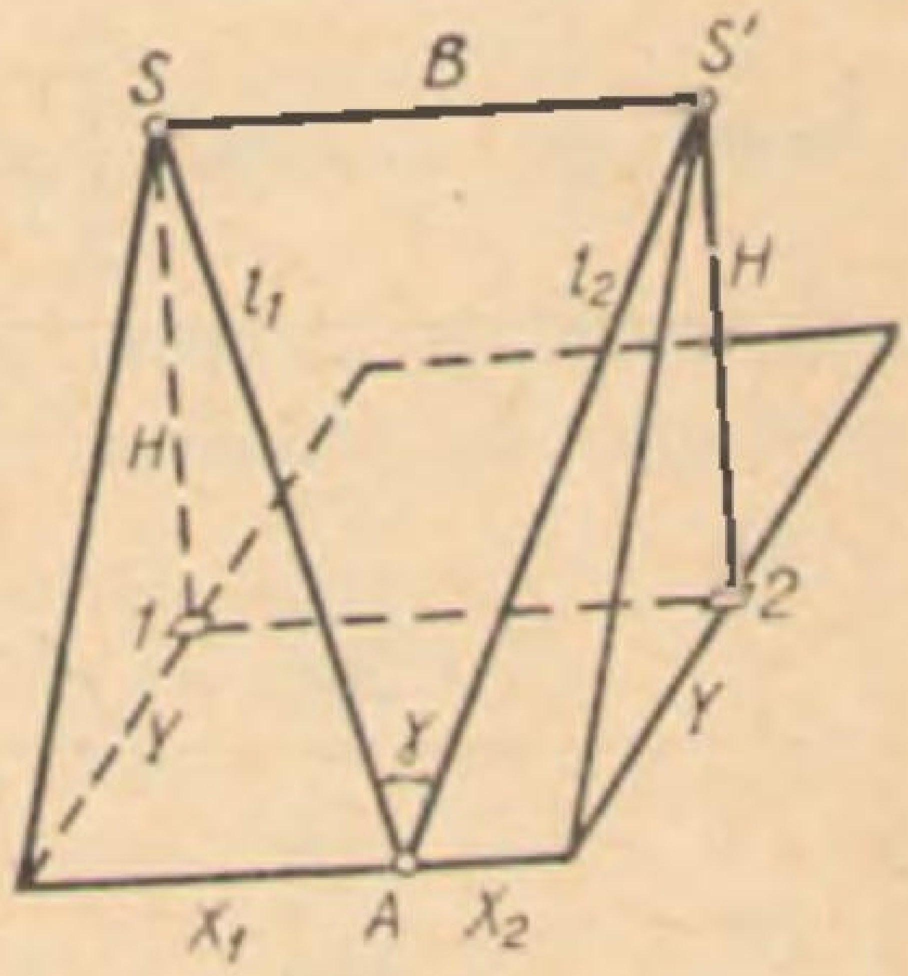

Рис. 2. Форма засечки при наблюдении стереомодели.

Совершенно ясно, что при проведении анализа k-факторов начальную точку менять нельзя.

В настоящей статье ограничимся анализом лишь одного фактора — влияния местоположения точки на ее вес. Примерно такой же подход к решению данного вопроса принят в работе [4], хотя приведенные там формулы, на наш взгляд, не являются общими.

Воспользуемся формулой веса при определении положения точки из прямой засечки:

$$\bar{p}_i = \frac{\sin^2 \gamma}{l_1^2 + l_2^2}, \tag{10}$$

где γ — угол засечки;

l_1, l_2 — длины пересекающихся лучей.

Применительно к идеальному случаю аэрофотосъемки, используя рис. 2, получим:

$$\bar{p}_i = \frac{B^2 (H^2 + Y)^2}{(H^2 + X_1^2 + Y^2)(H^2 + X_2^2 + Y^2)(2H^2 + 2Y^2 + X_1^2 + X_2^2)}. \tag{11}$$

Для стандартных точек легко получаем из (11) выражение, опубликованное в [4]:

$$\bar{p}_i = \frac{B^2}{(H^2 + Y^2 + B^2)(2H^2 + 2Y^2 + B^2)}, \tag{11'}$$

где B — базис засечки;

H — высота фотографирования;

Y — ордината точки в пространственной фотограмметрической системе координат;

X_1 — абсцисса точки;

$$X_2 = B - X_1.$$

Введем вместо этих величин в формулу (11) координаты точки снимка, базис снимка, фокусное расстояние:

$$m = \frac{B}{b} = \frac{H}{f} = \frac{Y}{y} = \frac{X_1}{x_1} = \frac{X_2}{x_2}, \tag{12}$$

где m — знаменатель масштаба съемки.

С учетом (12) формула (11) примет вид:

$$\bar{p}_i = \frac{b^2 (f^2 + y^2)}{(f^2 + x_1^2 + y^2)(f^2 + x_2^2 + y^2)(2f^2 + 2y^2 + x_1^2 + x_2^2)} \cdot \frac{1}{m^2}. \qquad (13)$$

Как и в посредственном способе воспользуемся соотношением $g = \frac{\bar{p}_i}{\bar{p}_1}$, где $\bar{p}_1$ — вес точки *1*, принятый за единицу.

Подставив координаты точки *1* в выражение (13), легко получаем соотношение:

$$g = \frac{\bar{p}_i}{\bar{p}_1} = \frac{(f^2 + y^2)(f^2 + b^2)(2f^2 + b^2)}{(f^2 + x_1^2 + y^2)(f^2 + x_2^2 + y^2)(2f^2 + 2y^2 + x_1^2 + x_2^2)}. \qquad (14)$$

Формула (14) и представляет зависимость веса точки (параллакса) от ее местоположения.

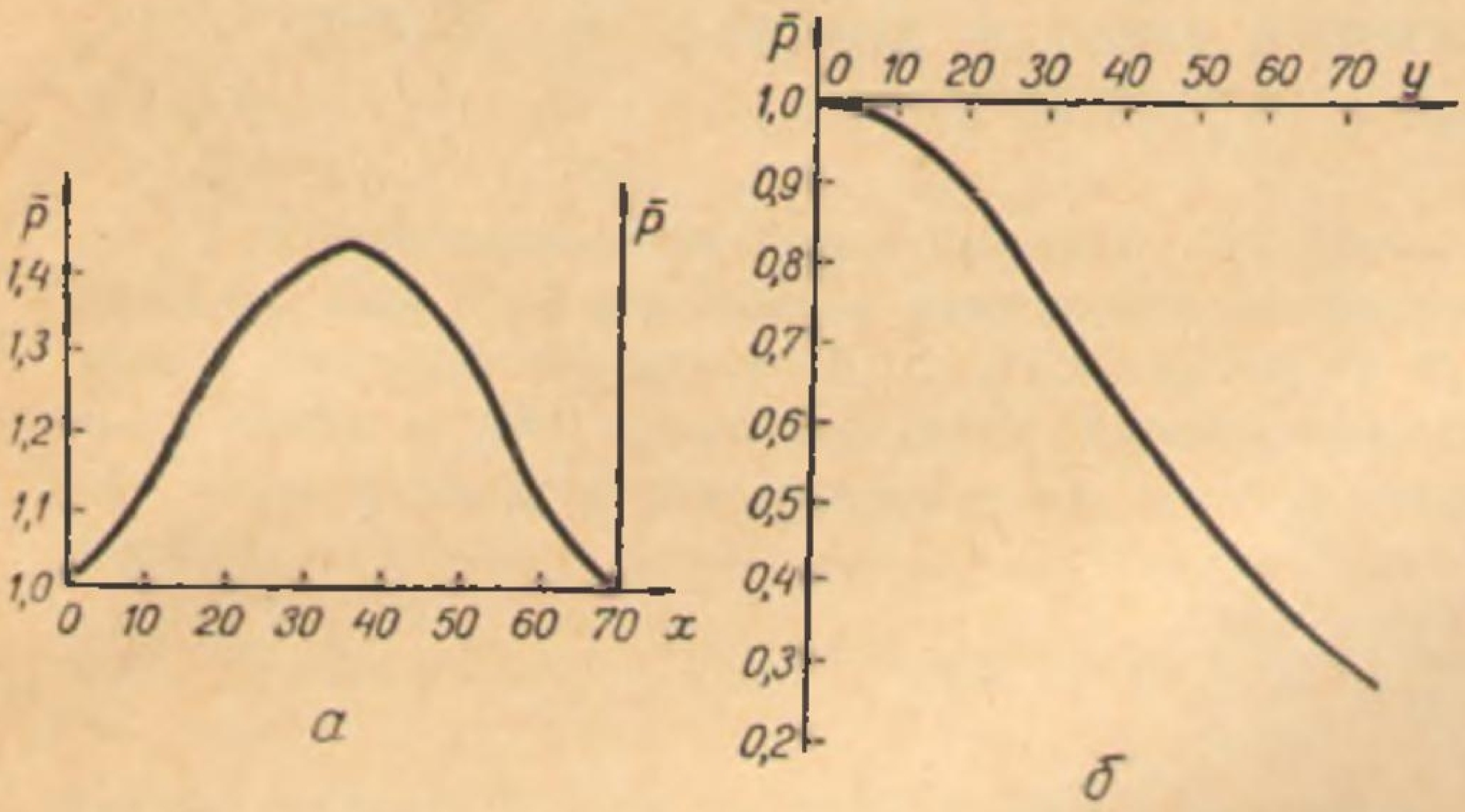

Рис. 3. *а* — график изменения весов для точек с абсциссой $x=0$; *б* — график изменения весов для точек с ординатой $y=0$.

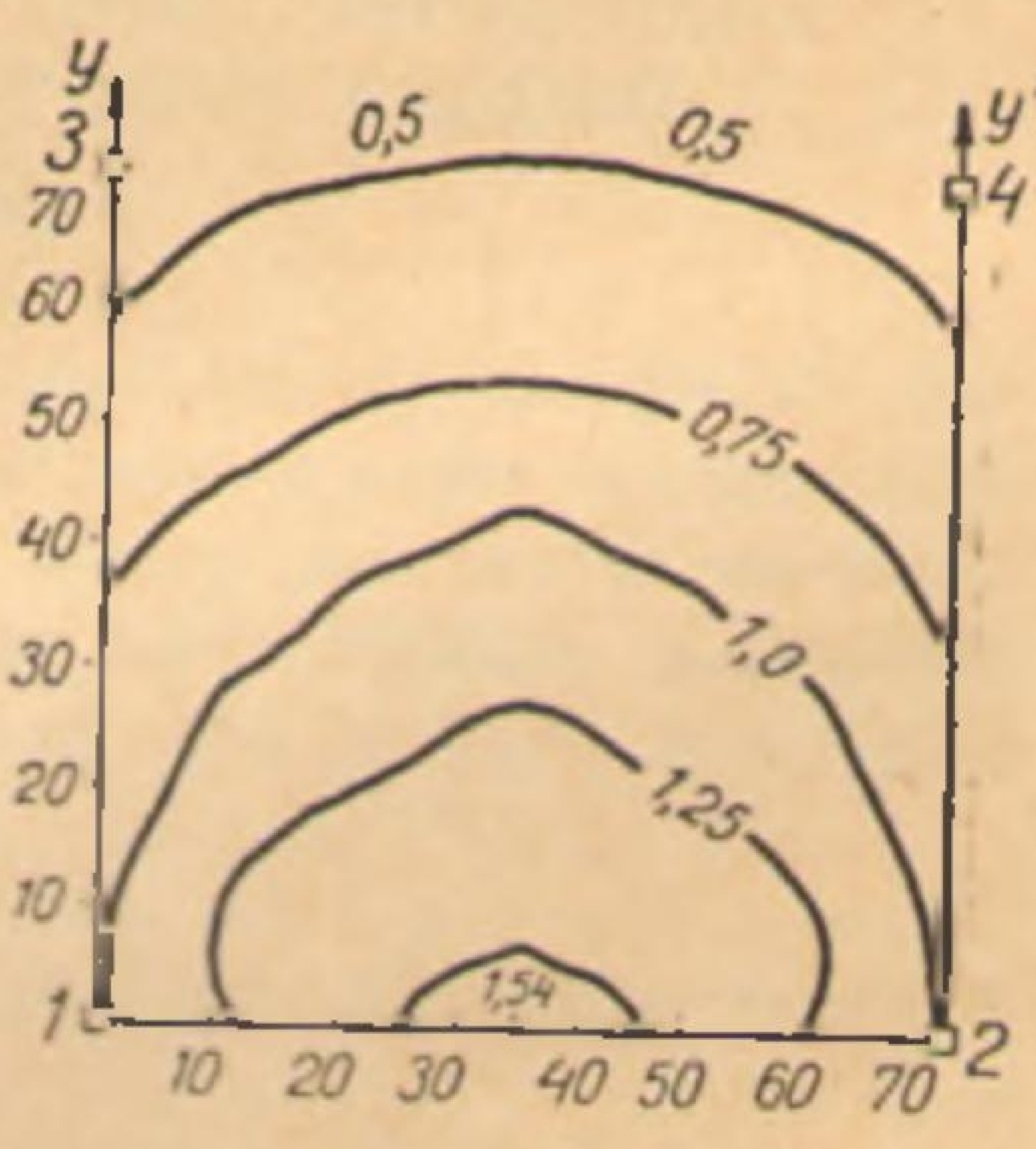

Рис. 4. Распределение весов для стереопары при $b=60$ *мм*, $f=70$ *мм*.

При исследовании уравнения (14) выяснилось, что вес для точек с абсциссой $x=0$ изменяется, согласно графику рис. 3, *а*, а для точек с ординатой $y=0$, согласно графику рис. 3, *б*.

Поверхность, представляющая изменение веса при изменении координат, является сложной и напоминает поверхность эллиптического параболоида. Максимальное значение функция (14) принимает при $y=0$, $x = \frac{b}{2}$, которое равно:

$$g_{\max} = \frac{f^2 (f^2 + b^2)(2f^2 + b^2)}{2\left(f^2 + \frac{1}{4} b^2\right)^3}. \qquad (15)$$

В качестве примера получены изоколы равных весов (см. рис. 4) для случая применения широкоугольной оптики ($f=70$ *мм*). Еще раз напомним, что функция (14) представляет зависимость веса только от местоположения точки.

ВЫВОДЫ

1. Местоположение точки является весьма важным фактором при приписывании веса параллаксу и им ни в коем случае нельзя пренебрегать.

2. Из приведенных в работе примеров видно, что лишь одно местоположение точки доводит соотношение весов в некоторых случаях до 1 : 5.

3. Если учесть, что средние квадратические ошибки m_x m_y на краю снимка в 2—3 раза больше, чем в центре, то ясно, что реальные веса могут достичь соотношения 1 : 12 и более.

4. Получение более конкретных и окончательных результатов требует проведения дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугай П. Т. Теорія похибок і спосіб найменших квадратів. Видавн. Львівського ун-ту, 1960.
2. Каргаполов И. Д. Определение элементов внешнего ориентирования аэроснимков из построения одиночной сети аналитическим методом. «Геодезия и картография», № 4, 1963.
3. Лобанов А. Н. Фототриангуляция с применением электронно-вычислительной машины. Геодезиздат, М., 1960.
4. Sanjib K. Ghosh. Determination of weights of parallax observation for numerical relative orientation. «Photogram. Eng.», 1963, 29, № 5, 887—893.
5. Hallert B. Definition and determination of weights of fundamental photogrammetric data and results. «Photogram. Eng.», 1963, 29, № 6, 1024—1026.

Работа поступила
24 сентября 1966 г.