МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1965 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 3

*А. С. ЛИСИЧАНСКИЙ*

# ФОРМУЛЫ КОСЫХ КОНФОРМНЫХ ПРОЕКЦИЙ ЭЛЛИПСОИДА

Применение косых проекций для составления карт позволяет во многих случаях уменьшить амплитуду колебания масштаба в пределах изображаемой области по сравнению с прямыми проекциями. Правда, вычисление таких проекций связано с затратой бóльшего труда. Даже если математическую поверхность Земли считать шаровой, то и тогда для вычисления косой проекции по формулам прямой приходится предварительно осуществлять преобразование координат, т. е. совершать переход от географических координат точек к координатам сферическим системы, нормальной для данной области и данной проекции. Если же поверхность Земли считать эллипсоидом вращения, то объем вычислительного труда возрастет еще больше, так как при этом потребуется предварительно отобразить эллипсоид на шаре.

Упомянутые промежуточные вычисления можно избежать, если мы будем располагать формулами косых проекций эллипсоида на плоскости непосредственно. Для конформных проекций такие формулы частично уже известны. Особенно интересны в этом отношении работы Г. А. Мещерякова [3, 4], в которых он, пользуясь поверхностными изометрическими (изотермическими) координатами и предложенным им обобщенным понятием стереографической проекции произвольной поверхности на плоскости, получил формулы трех основных видов косых конформных проекций эллипсоида — азимутальной (стереографической), цилиндрической и конической. При этом формулы двух последних проекций были получены им с помощью известного из теории аналитических функций метода конформного преобразования в комплексной области первой проекции.

Следует заметить, что формулы указанных трех косых проекций эллипсоида можно получить и не прибегая к теории аналитических функций. С неменьшим успехом они могут быть получены путем того же двойного конформного отображения — эллипсоида на шаре и шара на плоскости. Первое отображение проще всего осуществить по Мольвейде, хотя, вообще говоря, могут быть применены и другие способы. При этом, как отображение эллипсоида на шаре, так и преобразование координат на шаре, необходимое для перехода к косым проекциям, можно осуществить не в процессе вычислений, а в ходе самих аналитических выкладок.

Ниже приводится такой вывод формул косых конформных проекций эллипсоида. Практически существенной особенностью рекомендуемых окончательных формул является то, что они отнесены к некоторой центральной точке $O$ изображаемой области, географическая широта и долгота (от Гринвича) которой $\varphi_0$ и $\lambda_0$ для эллипсоида могут быть легко определены с помощью карты или глобуса с округлением до 30′ или целых градусов. Точка $O'$, являющаяся изображением на плоскости точки $O$, служит началом плоских прямоугольных координат. Ось абсцисс образует с меридианом точки $O$ угол $\varepsilon$, считаемый от меридиана против хода часовой стрелки. Значение угла $\varepsilon$ также определяется с помощью карты или глобуса, при этом будем руководствоваться следующим.

Для цилиндрической проекции угол $\varepsilon$ равен дополнению до 90° угла при точке $O$ между меридианом и дугой среднего большого круга, проведенного в направлении наибольшей вытянутости изображаемой области.

Для конической проекции он равен дополнению до 90° угла между меридианом и дугой среднего малого круга, также проведенного в направлении наибольшей вытянутости данной области.

Для стереографической проекции, вычисляемой самостоятельно, угол $\varepsilon$ следует принять равным нулю, и тогда положительное направление оси абсцисс будет совпадать с северным направлением меридиана точки $O$. Если же вычисление стереографической проекции осуществлять с целью получения производной конформной проекции с эллипсоидными изоколами путем сочетания первой с цилиндрической или конической [1, 2], то значение угла $\varepsilon$ для нее должно быть взято равным найденному значению его для той проекции, с которой она будет сочетаться.

## 1. Конформное отображение эллипсоида на шаре

Пусть $\varphi$ и $\lambda$ — географическая широта и долгота (от Гринвича) произвольной точки земного эллипсоида, $\Phi$ и $\Lambda$ — широта и долгота этой точки на шаре. При конформном отображении эллипсоида на шаре по Мольвейде имеют место такие соотношения:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\Phi}{2}\right)=U \text{ и } \Lambda=\lambda, \tag{1}$$

где

$$U=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}}, \tag{2}$$

$e$ — эксцентриситет земного эллипсоида.

Масштаб длин $\mu$ в произвольной точке при таком отображении выражается формулой

$$\mu=\frac{R\cos\Phi}{r}, \tag{3}$$

где $R$ — радиус земного шара, $r$ — радиус параллели эллипсоида, широта которой $\varphi$. Заметим, что числовое значение радиуса $R$, вообще говоря, может быть взято произвольно. Практически же выбор этой величины будет зависеть от широты точки, масштаб в которой принимается равным единице.

## 2. Преобразование координат на шаре

Совершим переход от географических координат $\Phi$ и $\Lambda$ точек на поверхности шара к координатам $z$ (зенитному расстоянию) и $a$ (азимуту) сферической полярной системы, полюсом которой является точка $O$, а полярной осью северное направление меридиана этой точки.

Как известно [5, стр. 96] связь между указанными координатами выражается формулами:

$$\left.\begin{aligned} \cos z &= \sin \Phi_0 \sin \Phi + \cos \Phi_0 \cos \Phi \cos l, \\ \operatorname{tg} a &= \frac{\cos \Phi \sin l}{\cos \Phi_0 \sin \Phi - \sin \Phi_0 \cos \Phi \cos l}, \\ l &= \Lambda - \Lambda_0 = \lambda - \lambda_0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Величины $z$ и $a$ при заданном способе отображения эллипсоида на шаре можно выразить через функции географических координат эллипсоида непосредственно. Так, из соотношений (1) имеем:

$$\sin \Phi = \frac{U^2 - 1}{U^2 + 1}, \quad \cos \Phi = \frac{2U}{U^2 + 1}. \tag{5}$$

В дальнейшем будет удобно воспользоваться обозначениями, введенными Г. А. Мещеряковым [3, стр. 82]:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{U^2 - 1}{U}, \quad \varkappa = \frac{U^2 + 1}{U}, \\ P &= U_0 U + \frac{1}{U_0 U}, \quad Q = \frac{U_0}{U} + \frac{U}{U_0}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Здесь нуль в качестве индекса при переменной $U$, а в последующем и при переменных $\sigma$, $\varkappa$ и других, обозначает, что они должны быть вычислены для широты $\varphi_0$ точки $O$. Значения величин $U, \frac{1}{U}$, $\sigma$, $\varkappa$ (эллипсоид Красовского) до седьмого десятичного знака приводятся в той же работе Г. А. Мещерякова с шагом в один градус широты.

Учитывая соотношения (5) и обозначения (6), формулы (4) для $\cos z$ и $\operatorname{tg} a$ можно записать в таком виде:

$$\cos z = \frac{\sigma_0 \sigma + 4 \cos l}{\varkappa_0 \varkappa}, \quad \operatorname{tg} a = \frac{\varkappa_0 \sin l}{\sigma - \sigma_0 \cos l}. \tag{7}$$

Обозначив

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= P + 2 \cos l, \\ s_2 &= Q - 2 \cos l, \\ s_3 &= \varkappa_0 \sin l, \\ s_4 &= \sigma - \sigma_0 \cos l, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

и учитывая наличие тождеств

$$\sigma_0 \sigma = P - Q, \ \varkappa_0 \varkappa = P + Q = s_1 + s_2, \tag{9}$$

$$s_3^2 + s_4^2 = s_1 s_2,$$

получим

$$\left.\begin{aligned} \cos z &= \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2}, \quad \sin z = \frac{2\sqrt{s_1 s_2}}{s_1 + s_2}, \\ \operatorname{tg} z &= \frac{2\sqrt{s_1 s_2}}{s_1 - s_2}, \quad \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \sqrt{\frac{s_2}{s_1}}, \\ \sec z &= \sqrt{\frac{s_1 + s_2}{s_1}}, \\ \operatorname{tg} a &= \frac{s_3}{s_4}, \quad \sin a = \frac{s_3}{\sqrt{s_1 s_2}}, \quad \cos a = \frac{s_4}{\sqrt{s_1 s_2}}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Для азимута $a$ в косой системе сферических координат (см. рис. 1, 2, 3) имеем

$$\tilde{a} = a + \varepsilon, \tag{11}$$

поэтому еще найдем

$$\sin \tilde{a} = \frac{s_4 \sin \varepsilon + s_3 \cos \varepsilon}{\sqrt{s_1 s_2}}, \quad \cos \tilde{a} = \frac{s_4 \cos \varepsilon - s_3 \sin \varepsilon}{\sqrt{s_1 s_2}}. \tag{12}$$

С помощью формул (10) и (12) легко получить формулы отдельных видов косых конформных проекций эллипсоида.

## 3. Стереографическая проекция эллипсоида

В данной проекции принятая система сферических полярных координат будет являться нормальной (рис. 1). Уравнения в плоских прямоугольных координатах и формула масштаба длин этой проекции имеют такой вид [5, стр. 278]:

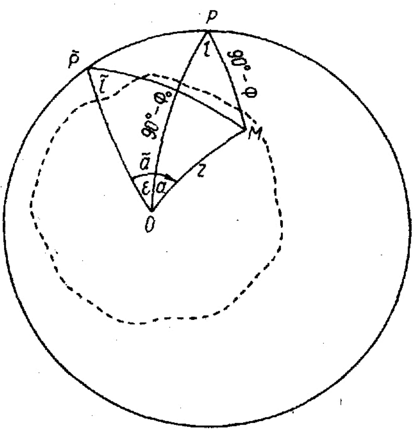


Рис. 1. Определение исходных величин для азимутальной (стереографической) косой проекции.

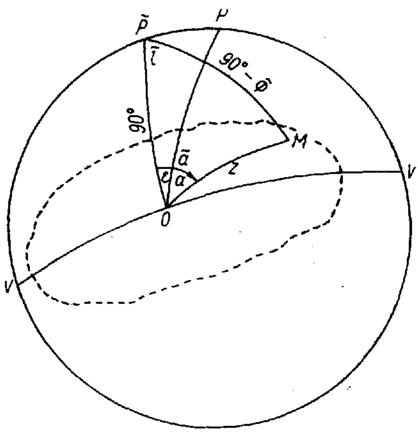


Рис. 2. Определение исходных величин для цилиндрической косой проекции.

$$\left.\begin{aligned} x &= 2R \,\mathrm{tg}\, \frac{z}{2} \cos \tilde{a}, \\ y &= 2R \,\mathrm{tg}\, \frac{z}{2} \sin \tilde{a}, \\ m &= \mu \sec^2 \frac{z}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Здесь, а далее также в цилиндрической и конической проекциях, в формуле масштаба длин $m$ введен сомножителем масштаб $\mu$, характеризующий степень уменьшения длин на стадии отображения эллипсоида на шаре. Причем формула (3) с учетом соотношений (5) и (6) запишется так:

$$\mu = \frac{2R}{r\varkappa}. \tag{14}$$

Окончательно для косой стереографической проекции эллипсоида из формул (13) с учетом формул (10), (12) и (14) имеем:

$$
\left.\begin{aligned}
x &= \frac{2R}{s_1}(s_4 \cos\varepsilon - s_3 \sin\varepsilon),\\
y &= \frac{2R}{s_1}(s_4 \sin\varepsilon + s_3 \cos\varepsilon),\\
m &= \frac{2R(s_1+s_2)}{r\varkappa s_1},
\end{aligned}\right\} \qquad (15)
$$

или

$$
\left.\begin{aligned}
x &= 2R\,\frac{\cos\varepsilon\,(\sigma-\sigma_0\cos l) - \sin\varepsilon\,\varkappa_0 \sin l}{P+2\cos l},\\
y &= 2R\,\frac{\sin\varepsilon\,(\sigma-\sigma_0\cos l) + \cos\varepsilon\,\varkappa_0 \sin l}{P+2\cos l},\\
m &= \frac{2k\varkappa_0}{r(P+2\cos l)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (15a)
$$

## 4. Цилиндрическая проекция эллипсоида

В этой проекции нормальной системой сферических координат будет та, полюс $\tilde{P}$ которой (рис. 2) является сферическим центром среднего большого круга $VOV$ изображаемой области, а точка $P$ — географический полюс. Если $\tilde{\Phi}$ — «широта» и $\tilde{l}$ — «долгота» (считаемая от большого круга $\tilde{P}O$) произвольной точки $M$ в этой косой системе «географических координат», то уравнения и формула масштаба цилиндрической проекции запишутся так [5, стр. 214]:

$$
x = R\ln\tilde{U},\quad y = R\tilde{l},\quad m = \mu\sec\tilde{\Phi}, \qquad (16)
$$

где

$$
\tilde{U} = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\tilde{\Phi}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sin\tilde{\Phi}}{1-\sin\tilde{\Phi}}}. \qquad (17)
$$

Из сферического треугольника $\tilde{P}MO$, в котором сторона $\tilde{P}O$ равна 90°, можем написать:

$$
\begin{aligned}
\sin\tilde{\Phi} &= \sin z\cos\tilde{a},\\
\operatorname{tg}\tilde{l} &= \operatorname{tg} z\sin\tilde{a}.
\end{aligned} \qquad (18)
$$

Кроме того,

$$
\sec\tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\tilde{\Phi}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 z\cos^2\tilde{a}}}. \qquad (19)
$$

Осуществив теперь сначала в формулах (18), затем в (17) и (19) и, наконец, в формулах (16) подстановки, аналогичные тем, которые были применены выше для стереографической проекции, получим формулы косой цилиндрической проекции эллипсоида в таком виде:

$$
\left.\begin{aligned}
x &= \frac{R}{2\,\mathrm{mod}}\lg\frac{s_1+s_2+2(s_4\cos\varepsilon - s_3\sin\varepsilon)}{s_1+s_2-2(s_4\cos\varepsilon - s_3\sin\varepsilon)},\\
y &= R\operatorname{arc\,tg}\frac{2(s_4\sin\varepsilon + s_3\cos\varepsilon)}{s_1-s_2},\\
m &= \frac{2R(s_1+s_2)}{r\varkappa\sqrt{(s_1+s_2)^2-4(s_4\cos\varepsilon - s_3\sin\varepsilon)^2}},
\end{aligned}\right\} \qquad (20)
$$

или

$$x=\frac{R}{2\,\mathrm{mod}}\lg\frac{\varkappa_0\varkappa+2\,[\cos\varepsilon\,(\sigma-\sigma_0\cos l)-\varkappa_0\sin\varepsilon\sin l]}{\varkappa_0\varkappa-2\,[\cos\varepsilon\,(\sigma-\sigma_0\cos l)-\varkappa_0\sin\varepsilon\sin l]},$$

$$y=R\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2\,[\sin\varepsilon\,(\sigma-\sigma_0\cos l)+\varkappa_0\cos\varepsilon\sin l]}{\sigma_0\sigma+4\cos l},$$

$$m=\frac{2R\varkappa_0}{r\sqrt{\varkappa_0^2\varkappa^2-4\,[\cos\varepsilon\,(\sigma-\sigma_0\cos l)-\varkappa_0\sin\varepsilon\sin l]^2}}. \qquad (20а)$$

## 5. Коническая проекция эллипсоида

В данной проекции нормальной системой сферических координат будет та, полюс $\tilde{P}$ которой (рис. 3) является сферическим центром среднего малого круга $vOv$ изображаемой области. В этом случае дуга большого круга $\tilde{P}O=90^\circ-\tilde{\Phi}_0$, где $\tilde{\Phi}_0$ — «широта» точки $O$ в косой системе. Значение $\tilde{\Phi}_0$ с округлением до $30'$ или $1^\circ$ практически может быть определено с помощью карты, а еще лучше глобуса, путем подбора циркулем положения дуги малого круга $vOv$ и ее сферического центра $\tilde{P}$.

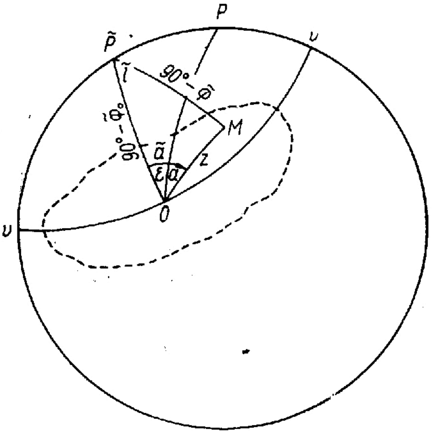


Рис. 3. Определение исходных величин для конической косой проекции.

Уравнения конической проекции в плоских полярных координатах $\rho$ и $\delta$ и формула масштаба этой проекции запишутся так [5, стр. 146]:

$$\rho=\frac{k}{\tilde{U}^\alpha},\quad \delta=\alpha\tilde{l},\quad m=\mu\,\frac{\alpha\rho}{\tilde{r}}. \qquad (21)$$

Здесь $\alpha$ и $k$ — произвольные постоянные проекции, определяемые формулами

$$\alpha=\sin\tilde{\Phi}_0,\quad k=\frac{\tilde{r}_0\tilde{U}_0^\alpha}{\alpha}; \qquad (22)$$

$\tilde{r}$ — радиус «параллели» косой системы «географических координат», т. е.

$$\tilde{r}=R\cos\tilde{\Phi}, \qquad (23)$$

и, следовательно,

$$\tilde{r}_0=R\cos\tilde{\Phi}_0. \qquad (24)$$

Из сферического треугольника $\tilde{P}MO$ можем написать

$$\sin\tilde{\Phi}=\alpha\cos z+\beta\sin z\cos\tilde{a},$$

$$\mathrm{tg}\,\tilde{l}=\frac{\sin z\sin\tilde{a}}{\beta\cos z-\alpha\sin z\cos\tilde{a}}, \qquad (25)$$

где

$$\beta=\cos\tilde{\Phi}_0. \qquad (26)$$

Произведя в формулах (25) подстановки с помощью формул (10) и (12) в дальнейшем для косой конической проекции, получим:

$$
\left.
\begin{aligned}
\rho &= k\left[\frac{s_1+s_2-\alpha(s_1-s_2)-\beta(s_4\cos\varepsilon-s_3\sin\varepsilon)}{s_1+s_2+\alpha(s_1-s_2)+\beta(s_4\cos\varepsilon-s_3\sin\varepsilon)}\right]^{\frac{\alpha}{2}},\\
\delta &= \alpha\operatorname{arc\,tg}\frac{2(s_4\sin\varepsilon+s_3\cos\varepsilon)}{\beta(s_1-s_2)-2\alpha(s_4\cos\varepsilon-s_3\sin\varepsilon)},\\
m &= \frac{2\alpha\rho(s_1+s_2)}{r\varkappa\sqrt{(s_1+s_2)^2-[\alpha(s_1-s_2)+2\beta(s_4\cos\varepsilon-s_3\sin\varepsilon)]^2}}.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (27)
$$

или

$$
\begin{aligned}
\rho &= k\left[\frac{\varkappa_0\varkappa-\alpha(\sigma_0\sigma+4\cos l)-\beta[(\sigma-\sigma_0\cos l)\cos\varepsilon-\varkappa_0\sin\varepsilon\sin l]}{\varkappa_0\varkappa+\alpha(\sigma_0\sigma+4\cos l)+\beta[(\sigma-\sigma_0\cos l)\cos\varepsilon-\varkappa_0\sin\varepsilon\sin l]}\right]^{\frac{\alpha}{2}},\\
\delta &= \alpha\operatorname{arc\,tg}\frac{2[(\sigma-\sigma_0\cos l)\sin\varepsilon+\varkappa_0\sin\varepsilon\sin l]}{\beta(\sigma_0\sigma+4\cos l)-2\alpha[(\sigma-\sigma_0\cos l)\cos\varepsilon-\varkappa_0\sin\varepsilon\sin l]},\\
m &= \frac{2\alpha\rho\varkappa_0}{r\sqrt{\varkappa_0^2\varkappa^2-\{\alpha(\sigma_0\sigma+4\cos l)+2\beta[(\sigma-\sigma_0\cos l)\cos\varepsilon-\varkappa_0\sin\varepsilon\sin l]\}^2}}.
\end{aligned}
\qquad (27\text{a})
$$

Уравнение косых конических проекций в прямоугольных координатах запишутся так:

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= \rho_0-\rho\cos\delta,\\
y &= \rho\sin\delta.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (28)
$$

Здесь постоянную $\rho_0$ следует вычислить с помощью первой формулы (27) или (27а) для широты $\varphi_0$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. А. С. Лисичанский. О вычислении производных конформных проекций с эллипсовидными изоколами. Республиканский межведомственный научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. I. Изд-во Львовского ун-та, 1964.
2. А. С. Лисичанский. Производные равноугольные проекции. Научные записки ЛПИ, вып. 85, серия геодезическая, № 9, Львов, 1962.
3. Г. А. Мещеряков. Новый способ вычисления косых конформных проекций. Известия высших учебных заведений, раздел «Геодезия и аэрофотосъемка», вып. 4, М., 1960.
4. Г. А. Мещеряков. Построение теории конформных проекций. Труды Новосибирского ин-та инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии, том XII, Новосибирск, 1959.
5. М. Д. Соловьев. Картографические проекции. Изд-во геодезической и картографической литературы ГУГК при СНК СССР, М., 1946.



Работа поступила
27 апреля 1965 г.