

Г. Г. ПЕТРАШЕВИЧ

### О ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ВЕРТИКАЛЬНОЙ РЕФРАКЦИИ

Геодезическое нивелирование довольно широко применяется для передачи отметок по сторонам триангуляционных сетей 1—3 классов. Измерение зенитных расстояний производится в соответствии с требованиями [3], где установлен единственный допуск — колебания зенитных расстояний и места зенита, выведенные из отдельных приемов, не должны быть более 15".

Естественно, возник вопрос о проверке точности вычисления коэффициента вертикальной рефракции при современном методе геодезического нивелирования, применяемого в производстве, по результатам производственных наблюдений в триангуляционных сетях. С этой целью использованы результаты односторонних и двусторонних измерений зенитных расстояний на трех участках триангуляционных сетей, отметки пунктов которых определены посредством геометрического нивелирования, а расстояния между ними получены из предварительного решения треугольников. Характеристика триангуляционных сетей дана в табл. 1.

Таблица 1  
 Характеристика триангуляционных участков

Название участка	Рельеф	Средняя величина стороны сети $S$ , км	Колебания		Средняя широта участка
			разностей высот в пределах, м	абсолютных высот в пределах, м	
<i>E</i>	Равнинный, открытый	11,7	от 0 до 54	от 8 до 203	46°30'
<i>У*</i>	Равнинный, степной	6,5	(эквивалентные высоты до 50 м) от 1 до 934	даные	48 00
<i>М</i>	Горный, пересеченный	15,7		от 434 до 2341	отсутствуют

\* Сводка наблюдаемых коэффициентов рефракции, выведенных из результатов работ Украинского АГП по геодезическому нивелированию [2].

По приведенным выше данным вычислены коэффициенты рефракции по формуле

$$k = \frac{2R}{S\rho} \delta z, \quad (1)$$

где  $R$  — радиус кривизны для средней широты участка;  
 $S$  — расстояние между пунктами триангуляции;  
 $\delta z$  — разность между теоретическим и измеренным зенитным расстоянием.

Теоретическое зенитное расстояние  $z$  определено по формуле

$$\operatorname{ctg} z = \frac{H_2 - H_1}{S \left(1 + \frac{H_2}{R}\right)} - \frac{S}{2R \left(1 + \frac{H_2}{R}\right)}, \quad (2)$$

где  $H$  — абсолютные высоты пунктов.

Для тех случаев, когда абсолютные высоты пунктов не превышают 1000 м,  $\frac{H_2}{R}$  в этой формуле принималось равным нулю. Поправки за уклонение отвесных линий и непараллельность уровенных поверхностей за отсутствием данных не учитывались.

С целью изучения закономерностей распределения величин  $k$  составлены статистические ряды с одинаковой длиной разрядов, равной 0,05  $k$ , и из разностей двойных равноточных измерений  $k' - k''$  (разности коэффициентов по направлениям двустороннего нивелирования) (табл. 3). Для каждого ряда вычислены начальные  $m_k^*$ ,  $\alpha_2^*$  и вторые центральные моменты  $D_k^*$  (дисперсия) по формулам, приведенным в [1]:

$$m_k^* = \sum_{i=1}^j \tilde{k}_i p_i^*, \quad (3)$$

где  $m_k^*$  — характеристика математического ожидания случайной величины;

$j$  — количество разрядов;

$\tilde{k}_i$  — представитель  $i$ -го разряда (взята середина его);

$p_i^*$  — частота появления случайной величины в  $i$ -м разряде.

$$\tilde{k}_i = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

где  $\alpha$  — значение левой границы разряда;

$\beta$  — значение правой границы разряда.

Для определения дисперсии вычислены начальные моменты второго порядка случайной величины  $k$  и  $k' - k''$  для каждого участка

$$\alpha_2^*[K] = \sum_{i=1}^j \tilde{k}_i^2 p_i^* \quad (4)$$

и дисперсии

$$D_k^* = \alpha_2^* - (m_k^*)^2. \quad (5)$$

Результаты вычисленных параметров нормального распределения ( $m = m_k^*$  и  $\sigma^2 = D_k^*$ , где  $\sigma$  — среднее квадратическое отклонение одного измерения) приведены в табл. 2.

Для исследования характера распределения величин  $k$  и  $k' - k''$  вычислена вероятность попадания величин в данный разряд по выражению

$$P(\alpha < K < \beta) = \Phi^* \left( \frac{\beta - m}{\sigma} \right) - \Phi^* \left( \frac{\alpha - m}{\sigma} \right), \quad (6)$$

где  $\frac{\beta-m}{\sigma}$  — расстояние от правого конца разряда до центра рассеивания, выраженное в средних квадратических отклонениях;  
 $\frac{\alpha-m}{\sigma}$  — аналогичное расстояние для левого конца разряда;  
 $\phi^*$  — нормальная функция Лапласа.

Таблица 2

Параметры нормального распределения

Название участка	Количество величин		Одностороннее нивелирование		Двустороннее нивелирование	
	$k$	$k'-k_1^*$	$m_k^*$	$\sigma_k$	$m_{k'-k''}$	$\sigma_{k'-k''}$
<i>E</i>	168	76	0,136	$\pm 0,129$	-0,0020	$\pm 0,202$
<i>У</i>	331	154	0,112	0,101	-0,0292	0,138
<i>М</i>	206	102	0,127	0,081	+0,0225	0,091

По таблице значений нормальной функции распределения  $\Phi^*(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^k e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$  случайной величины определены вероятности попадания в отдельные интервалы, а затем подсчитано теоретическое количество измерений по формуле

$$n_i = m_i^* p_i, \quad (7)$$

где  $m_i^*$  — количество измерений в статистическом ряде;  
 $p_i$  — теоретическая вероятность  $i$ -го разряда.  
 Результаты вычислений приведены в табл. 3.

По результатам, приведенным в табл. 3, построены графики нормального и статистического распределения только величин  $k$  для каждого участка (рис. а, б, в).

Расхождения между нормальным и статистическим распределением неизбежны. Вопрос о том, объясняются ли эти расхождения только случайными обстоятельствами, вызванными ограниченным числом наблюдений или они обусловлены преобладающим влиянием некоторых факторов, играющих превалирующую роль в статистическом распределении, можно решить при помощи  $\chi^2$  критерия — критерия Пирсона, для которого запишем:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^j \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}. \quad (8)$$

Распределение  $\chi^2$  зависит от числа «степеней свободы»  $r$ , равного числу разрядов  $j$  минус число независимых условий, наложенных на частоты  $p_i$  (в данном случае  $s=2$ ).

По таблицам значений  $\chi^2$  в зависимости от  $r$  определены вероятности  $p_{\chi^2}$  для рядов величин  $k$  и  $k'-k''$ , которые во всех случаях оказались меньшими 0,01. Исключение составляют величины  $p_{\chi^2}$  для рядов  $k'-k''$  участка *E*, где вероятность равна 0,25. Так как эти вероятности малы, то следует считать, что экспериментальные данные противоречат гипотезе закона нормального распределения.

Из табл. 2 следует, что максимальное значение величина  $\sigma_h$  имеет для равнинного участка  $E$  и значение коэффициента вертикальной рефракции оказалось наибольшим для этого участка ( $k=0,136$ ). Для горного участка  $M$   $\sigma_h = \pm 0,081$ . Итак, точность определения коэффициента вертикальной рефракции для одностороннего геодезического нивелирования в горных условиях почти в два раза больше, чем на участке с равнинным рельефом.

Таблица 3

Количество измерений в разрядах

Разряды	Интервалы	$E$				$У$				$M$			
		Одностороннее нивелирование		Двустороннее нивелирование		Одностороннее нивелирование		Двустороннее нивелирование		Одностороннее нивелирование		Двустороннее нивелирование	
		$np_i$	$m_i$	$np_i$	$m_i$	$np_i$	$m_i$	$np_i$	$m_i$	$np_i$	$m_i$	$np_i$	$m_i$
1	-0,75												
2	-0,70												
3	-0,65												
4	-0,60												
5	-0,55			0,3	1								
6	-0,50			0,5	1								
7	-0,45			0,8	2								
8	-0,40	0,0	1	1,4	0			1,0	2				
9	-0,35	0,0	1	2,1	0			2,2	2				
10	-0,30	0,2	1	3,0	1			4,7	3				
11	-0,25	0,6	0	4,1	4	0,3	1	8,1	5	0,0	1	0,6	1
12	-0,20	1,5	1	5,2	7	1,3	4	12,7	12	0,1	2	2,1	2
13	-0,15	3,4	2	6,2	3	4,4	4	17,4	16	0,5	3	6,1	0
14	-0,10	6,9	3	7,0	10	12,2	12	21,1	33	2,5	2	12,6	5
15	-0,05	12,0	7	7,4	8	26,6	14	22,2	19	9,1	4	19,4	37
16	0,00	17,9	15	7,4	11	45,8	41	20,6	29	23,2	5	22,2	34
17	0,05	23,1	29	7,0	7	59,6	50	16,7	14	40,8	31	18,8	9
18	0,10	25,2	38	6,1	11	64,0	93	11,9	9	49,9	89	11,9	7
19	0,15	25,2	20	5,1	1	53,6	76	7,5	3	42,0	48	5,2	3
20	0,20	20,4	23	4,0	5	34,9	23	4,1	0	24,6	14	2,3	2
21	0,25	14,6	16	2,9	2	18,0	7	2,0	3	9,9	5	0,5	1
22	0,30	9,0	7	2,0	0	7,3	1	0,8	1	2,8	1	0,1	0
23	0,35	4,7	0	1,3	0	2,4	1	0,3	1	0,6	0	0,0	0
24	0,40	2,2	1	0,8	0	0,6	1	0,1	1	0,1	0	0,0	0
25	0,45	0,9	1	0,5	0	0,1	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0
26	0,50	0,3	1	0,3	0	0,0	2	0,0	1	0,0	1	0,0	1
27	0,55	0,1	1	0,1	0	0,0	0						
28	0,60			0,1	0	0,0	0						
29	0,65			0,0	1	0,0	1						
30	0,70												
	0,75			0,0	1								

Интерес представляют и результаты геодезического нивелирования на участке  $У$  южного степного района Украины, для которого  $k=0,112$  и  $\sigma_h = \pm 0,101$ , близкое к  $\sigma_h$  горного участка.

Аналогичное изменение величин  $\sigma_{k'-k''}$  от участка к участку наблюдается и для разностей двойных равноточных измерений. Однако здесь выявлено влияние систематических ошибок  $m_{k'-k''}^*$ , величины которых изменяются от участка к участку. Ограниченное число измерений в рядах  $k'-k''$  только позволяет полагать, что это влияние носит случайный характер, так как в двух случаях оно имеет отрицательный знак, а в одном случае — положительный.

Кроме того, по разностям двойных равноточных измерений для каждого участка вычислены по известным формулам величины систематического влияния  $\Theta$ , средние квадратические ошибки отдельного измерения пары (средняя квадратическая ошибка коэффициента одностороннего нивелирования)

$$m_k = \pm \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}}$$

и среднего из парных измерений (ошибка коэффициента двустороннего нивелирования)

$$m_{\text{ср}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}$$

Известно, что эти величины можно получить и по следующим формулам:

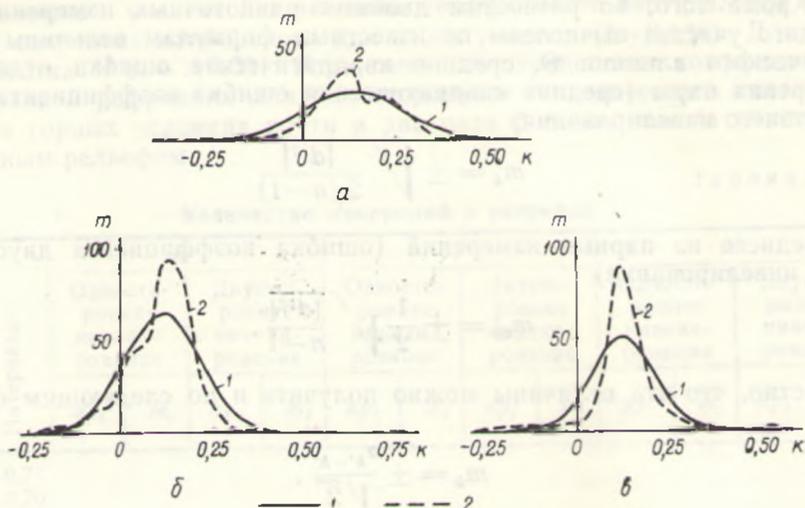
$$m_k = \pm \frac{\sigma_{k'-k''}}{\sqrt{2}}, \quad (9)$$

$$m_{\text{ср}} = \pm \frac{\sigma_{k'-k''}}{2}. \quad (10)$$

Результаты вычислений приведены в табл. 4, где в скобках даются значения ошибок, вычисленные по формулам (9) и (10). Полученные значения  $\Theta$  и  $m_{k'-k''}$  (табл. 2) отличаются между собой незначительно. Большее расхождение наблюдается между величинами  $\sigma_k$  (табл. 2) и  $m_k$  (табл. 4), что объясняется ограниченным числом парных измерений и наличием систематического влияния, которое в определенной степени сказалось на величинах  $\sigma_k$ .

Возможно, что сравнительно большую точность определения  $k$  для участка У можно объяснить тем, что измерение зенитных расстояний проводилось в близполуденное время, а на остальных двух участках, в большинстве случаев, — на протяжении всего дня, исключая периоды, близкие (в пределах двух часов) к восходу Солнца. В этом случае много наблюдений могло быть выполнено при инверсии, когда значения коэффициентов рефракции максимальны и их величины сравнительно быстро изменяются.

Изменения величины среднего коэффициента рефракции от участка к участку значительно меньше, чем аналогичные изменения от направления к направлению. Основную роль в этом играет высота прохождения визирного луча над подстилающей поверхностью и стратификация атмосферы. Как известно, в дневной период существует нормальное распределение температуры с высотой, а в вечерние, ночные и утренние периоды — инверсионное распределение. Причем переход от одного распределения к другому осуществляется примерно за три часа до захода и за три часа после восхода Солнца. Этим, по-видимому, объясняется значительно большая точность геодезического нивелирования на участке У, где наблюдения зенитных расстояний производились строго в близполуденное время (2), и поэтому возможность проводить наблюдения в инверсионный период почти исключалась. Поскольку требования (3) предусматривали производство геодезического нивелирования в течение всего дня, исключая периоды, близкие к восходу и заходу Солнца, в пределах двух часов, то значительная часть наблюдений могла быть произведена в инверсионный период при больших и сильно изменяющихся коэффициентах вертикальной рефракции.



Графики распределения коэффициентов рефракции:  
 а — участка Е; б — участка У; в — участка М; 1 — нормальное распределение;  
 2 — статистическое распределение.

Как видно из графиков (см. рис. а, б, в), количество величин в статистических распределениях со сравнительно меньшими значениями  $\sigma$  встречаются чаще, чем количество соответствующих величин при нормальном распределении (табл. 4). Кроме того, отличие закономерностей статистических распределений от нормальных обусловлено положительным эксцессом.

Таблица 4  
 Точность коэффициента рефракции

Название участка	Количество величин	$\theta$	$m_k$	$m_{cp}$
Е	76	-0,0008	$\pm 0,146$ ( $\pm 0,143$ )	$\pm 0,103$ ( $\pm 0,101$ )
У	154	-0,0316	$\pm 0,097$ ( $\pm 0,097$ )	$\pm 0,069$ ( $\pm 0,069$ )
М	102	+0,0230	$\pm 0,064$ ( $\pm 0,064$ )	$\pm 0,045$ ( $\pm 0,045$ )

Из приведенных результатов следует, что распределение коэффициентов вертикальной рефракции не подчиняется закону нормального распределения.

В рассматриваемом случае средние квадратические ошибки коэффициентов, определенные статистическим путем из производственных наблюдений, включают все ошибки, вызванные погрешностями геометрического нивелирования, действием инструментальных и личных погрешностей, а также влиянием внешней среды. Поэтому для оценки точности по известной формуле ошибка превышения двустороннего нивелирования

$$m_h = \pm S \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{m_z}{\rho''} \right)^2 + \left( \frac{Sm_k}{2R} \right)^2 \right]}, \quad (11)$$

где принято, что  $\frac{m_z}{\rho''} = 0$  и по приведенным значениям  $S$  (табл. 1) и  $m_h$  (табл. 4) вычислены ошибки превышений для двустороннего нивелирования.

Ориентировочно величины невязок в равносторонних треугольниках сетей для средних длин сторон вычислены по формуле

$$f_{\Delta h} = \pm m_h \sqrt{3}.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 5.

Таблица 5  
Точность геодезического нивелирования

Название участка	Е	У	М
$s, км$	11,7	6,5	15,7
$m_h, м$	$\pm 1,11$	$\pm 0,23$	$\pm 0,87$
$f_{\Delta h}$	1,92	0,40	1,51

Из приведенных результатов (табл. 5) видно, что точность геодезического нивелирования на горном участке гораздо большая, чем на остальных участках.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е. Е. Теория вероятностей. «Наука», М., 1964.
2. Изотов А. А. и Пеллинен Л. П. Исследование земной рефракции и методов геодезического нивелирования. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 102, М., 1955.
3. Основные положения о построении государственной геодезической сети СССР. М., Геодезиздат, 1961.

Работа поступила  
30 апреля 1967 года