МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1968 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 7

А. Е. ФИЛИППОВ

УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СЕТИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Общеизвестно, что уравнивание пространственной триангуляции можно выполнить как методом косвенных измерений, так и методом условий или условных измерений. В геодезической литературе достаточно подробно освещено применение первого метода, что нельзя сказать о втором. Не касаясь вопроса о преимуществах и целесообразности применения того или другого метода, мы делаем в настоящей статье попытку рассмотреть основные виды условных уравнений, возникающих в несвободной сети угловой пространственной триангуляции.

Для примера рассмотрим сеть треугольников, показанную на рис. 1. В каждом ее пункте получены из измерений горизонтальные направления или горизонтальные углы и зенитные расстояния. Последние будем считать свободными от влияния вертикальной рефракции. Пункты *1, 2, 3, 4, 5* — жесткие. Для них известны твердые значения пространственных координат *B, L, H* или *x, y, z*. В пунктах *1* и *5* выполнены астрономические определения широт φ, долгот λ и азимутов α направлений *1, 2* и *5, 4*.

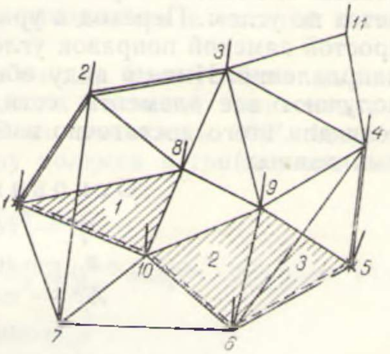

Рис. 1. Схема триангуляционной сети.

Чтобы определить пространственную триангуляцию по величине и по положению в системе координат, ориентированной относительно плоскости земного экватора и плоскости начального астрономического меридиана, достаточно знать длину одной из сторон, определяющую масштаб сети, пространственные координаты *B, L, H* или *x, y, z* одного из пунктов и три параметра, связанные с ориентировкой сети. Последними могут служить астрономическая широта φ, астрономическая долгота λ и астрономический азимут α. Численные значения этих геометрических элементов являются исходными данными. Их общее число равно семи.

Число условных уравнений, возникающих в сети, можно подсчитать следующим образом. Пусть p — число пунктов, n — число всех угловых измерений, e — число избыточных исходных данных. Если измерялись горизонтальные направления, то для каждого пункта должны быть найдены шесть величин: три пространственные координаты, два параметра, определяющие направление отвесной линии (вертикальной оси инструмента) и один параметр, характеризующий направление нулевого диаметра горизонтального круга (ориентирный угол). Поэтому число R условных уравнений, равное числу избыточных измерений, определится формулой

$$R = n - (6p - 7) + e.$$

Если измерялись горизонтальные углы, то для каждого пункта должны быть найдены три координаты и два параметра, характеризующие направление отвесной линии. Поэтому число условных уравнений следует вычислять по формуле

$$R = n - (5p - 7) + e.$$

В последнем случае число уравнений будет больше на число условий горизонта, возникающих в данной сети.

В нашем примере, при уравнивании горизонтальных направлений, имеем: $n=96$, $p=11$, $e=14$ и $R=51$. При уравнивании горизонтальных углов: $n=88$, $p=11$, $e=14$ и $R=54$. Условные уравнения горизонта возникают в точках *8, 9, 10*.

Рассмотрим теперь по отдельным видам геометрические условия и вытекающие из них условные уравнения между поправками измеренных элементов. При этом будем предполагать, что уравнивание ведется по углам. Переход к уравниванию по направлениям осуществится простой заменой поправок углов разностями поправок соответствующих направлений. Имея в виду общий случай, будем считать, что поправки получают все элементы сети, найденные из измерений (разумеется, если для этого достаточно избыточных измерений и избыточных исходных данных).

Основные обозначения:

a_i^{jk} — горизонтальные углы,
z_{ij} — зенитные расстояния,
A_i^{jk} — плоские углы пространственных треугольников,
s_{ij} — длины линий,
$B_i,\ L_i,\ H_i$ — геодезические координаты,
$x_i,\ y_i,\ z_i$ — декартовы координаты,
$\varphi_i,\ \lambda_i,\ \alpha_{ij}$ — астрономические координаты и азимуты,
$\delta a_i^{jk},\ \delta z_{ij},\ \delta s_{ij},\ \delta\varphi_i,\ \delta\lambda_i,\ \delta\alpha_{ij}$ — поправки измеренных величин, определяемые из уравнения.

Верхние индексы в обозначении какого-либо угла соответствуют номерам конечных точек стороны треугольника, против которой лежит данный угол, нижний индекс отвечает номеру вершины, где этот угол измерялся.

Измеренные величины или их функции будем отмечать штрихами. Однако для упрощения записей во многих случаях не будем делать различия в обозначениях для измеренных и вероятнейших значений величин и их функций, надеясь, что это не вызовет недоразумений.

Условные уравнения фигур. Эти уравнения выражают требование, чтобы сумма вероятнейших значений плоских углов в пространственных треугольниках равнялась 180° [4]. Плоские углы какого-либо треугольника $i,\ j,\ k$ выражаются через зенитные расстояния и горизонтальные углы следующим образом:

$$\cos A_i^{jk} = \cos z_{ij} \cos z_{ik} + \sin z_{ij} \sin z_{ik} \cos a_i^{jk}. \qquad (1)$$

Формулы для косинусов двух других углов получаются круговой заменой индексов.

В общем виде условное уравнение треугольника i, j, k запишется так:

$$\delta A_i^{jk} + \delta A_j^{ki} + \delta A_k^{ij} + (A_i^{jk} + A_j^{ki} + A_k^{ij} - 180^\circ) = 0. \quad (2)$$

Поправки плоских углов в этом уравнении нужно выразить через поправки зенитных расстояний и поправки горизонтальных углов. Например,

$$\delta A_i^{jk} = \operatorname{cosec} A_i^{jk} (\sin z_{ij} \cos z_{ik} - \cos z_{ij} \sin z_{ik} \cos a_i^{jk}) \delta z_{ij} +$$
$$+ \operatorname{cosec} A_i^{jk} (\cos z_{ij} \sin z_{ik} - \sin z_{ij} \cos z_{ik} \cos a_i^{jk}) \delta z_{ik} +$$
$$+ \operatorname{cosec} A_i^{jk} \sin z_{ij} \sin z_{ik} \sin a_i^{jk} \delta a_i^{jk}. \quad (3)$$

Если имеются диагонали, образующие тетраэдры (в плоской триангуляции — четырехугольники), то в каждом тетраэдре следует составить три условия фигуры. Так, диагональ *4, 6* образовала систему из четырех треугольников — для любых трех из них должны быть составлены условия фигур.

Число условий фигур равно числу треугольников в простой сети плюс число диагоналей.

Условные уравнения горизонта. Эти условия выражают требование, чтобы сумма вероятнейших значений горизонтальных углов, измеренных вокруг одной точки, равнялась 360° Число условных уравнений горизонта равно числу полюсов в триангуляционной сети.

Уравнение горизонта для точки *8* имеет вид

$$\delta a_8^{1,2} + \delta a_8^{2,3} + \delta a_8^{3,9} + \delta a_8^{9,10} + \delta a_8^{1,10} + (a_8^{1,2} + a_8^{2,3} + a_8^{3,9} + a_8^{9,10} + a_8^{1,10} - 360^\circ) = 0. \quad (4)$$

Аналогично составляются уравнения для точек *9* и *10*.

Боковые условные уравнения. Как и в плоской триангуляции, эти условные уравнения выражают требование, чтобы в замкнутой цепи треугольников длина какой-либо стороны, вычисленная от произвольно выбранной, но одной и той же исходной стороны посредством вероятнейших углов двумя различными путями, имела одинаковое значение.

Так, в фигуре *4, 5, 6, 9*, выбрав за плюс точку *6*, получим условие

$$\frac{\sin A_5^{4,6} \sin A_4^{6,9} \sin A_9^{5,6}}{\sin A_4^{5,6} \sin A_9^{4,6} \sin A_5^{6,9}} = 1,$$

откуда вытекает условное уравнение между поправками плоских углов

$$\operatorname{ctg} A_5^{4,6} \delta A_5^{4,6} + \operatorname{ctg} A_4^{6,9} \delta A_4^{6,9} + \operatorname{ctg} A_9^{5,6} \delta A_9^{5,6} - \operatorname{ctg} A_4^{5,6} \delta A_4^{5,6} - \operatorname{ctg} A_9^{4,6} \delta A_9^{4,6} -$$
$$- \operatorname{ctg} A_5^{6,9} \delta A_5^{6,9} + \frac{\rho''}{\mu} \lg \frac{\sin A_5^{4,6} \sin A_4^{6,9} \sin A_9^{5,6}}{\sin A_4^{5,6} \sin A_9^{4,6} \sin A_5^{6,9}} = 0. \quad (5)$$

Здесь поправки δA_i^{jk} выражены в секундах дуги. Каждую из них нужно выразить по формулам вида (3) через поправки соответствующих зенитных расстояний и горизонтальных углов.

В центральных системах с полюсами в точках *1, 8, 9, 10* уравнения составляются аналогичным образом. Например, в системе *1, 2, 8, 10, 7* с полюсом в точке *1* имеем условие

$$\frac{\sin A_7^{1,10} \sin A_{10}^{1,8} \sin A_8^{1,2} \sin A_2^{1,7}}{\sin A_{10}^{1,7} \sin A_8^{1,10} \sin A_2^{1,8} \sin A_7^{1,2}} = 1.$$

Число боковых условных уравнений равно числу диагоналей, образующих тетраэдры, плюс число центральных систем.

Условие угла между взаимными вертикальными плоскостями. Если треугольники *1, 2, 3* и *1, 2, 4* имеют общую сторону *1, 2* то значение угла γ между взаимными вертикальными плоскостями, проходящими через эту сторону, вычисленное по уравненным элементам первого и второго треугольников, должно оказаться одним и тем же [1]. То есть,

$$\gamma^{\mathrm{I}} - \gamma^{\mathrm{II}} = 0$$

или

$$K_1^{\mathrm{I}} - K_2^{\mathrm{I}} \pm (K_1^{\mathrm{II}} - K_2^{\mathrm{II}}) = 0.$$

Указанное условие приводит к следующему уравнению, связывающему поправки измеренных зенитных расстояний и горизонтальных углов в смежных треугольниках *1, 2, 3* (I) и *1, 2, 4* (II)

$$\delta K_1^{\mathrm{I}} - \delta K_2^{\mathrm{I}} \pm \delta K_1^{\mathrm{II}} \mp \delta K_2^{\mathrm{II}} + (K_1^{\mathrm{I}} - K_2^{\mathrm{I}} \pm K_1^{\mathrm{II}} \mp K_2^{\mathrm{II}}) = 0$$

или в раскрытой форме

$$\begin{gathered}
(-\sin K_1^{\mathrm{I}} \operatorname{ctg} A_1^{2,3} \mp \sin K_1^{\mathrm{II}} \operatorname{ctg} A_1^{2,4})\,\delta z_{1,2} + \sin C_1^{\mathrm{I}} \operatorname{cosec} A_1^{2,3}\,\delta z_{1,3} \pm \\
\pm \sin C_1^{\mathrm{II}} \operatorname{cosec} A_1^{2,4}\,\delta z_{1,4} + (\sin K_2^{\mathrm{I}} \operatorname{ctg} A_2^{1,3} \pm \sin K_2^{\mathrm{II}} \operatorname{ctg} A_2^{1,4})\,\delta z_{2,1} - \\
- \sin C_2^{\mathrm{I}} \operatorname{cosec} A_2^{1,3}\,\delta z_{2,3} \mp \sin C_2^{\mathrm{II}} \operatorname{cosec} A_2^{1,4}\,\delta z_{2,4} + \qquad (6) \\
+ \sin K_1^{\mathrm{I}} \cos C_1^{\mathrm{I}} \operatorname{cosec} a_1^{2,3}\,\delta a_1^{2,3} \pm \sin K_1^{\mathrm{II}} \cos C_1^{\mathrm{II}} \operatorname{cosec} a_1^{2,4}\,\delta a_1^{2,4} - \\
- \sin K_2^{\mathrm{I}} \cos C_2^{\mathrm{I}} \operatorname{cosec} a_2^{1,3}\,\delta a_2^{1,3} \mp \sin K_2^{\mathrm{I}} \cos C_2^{\mathrm{I}} \operatorname{cosec} a_2^{1,4}\,\delta a_2^{1,4} + \\
+ (K_1^{\mathrm{I}} - K_2^{\mathrm{I}} \pm K_1^{\mathrm{II}} \mp K_2^{\mathrm{II}}) = 0.
\end{gathered}$$

Углы K и C с соответствующими индексами можно вычислить с помощью написанных ниже формул. Они берутся в первой или второй четвертях в зависимости от знака $\operatorname{ctg} K$ или $\cos C$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} K_1^{\mathrm{I}} &= \operatorname{ctg} z_{1,3} \sin z_{1,2} \operatorname{cosec} a_1^{2,3} - \cos z_{1,2} \operatorname{ctg} a_1^{2,3}, \\
\operatorname{ctg} K_2^{\mathrm{I}} &= \operatorname{ctg} z_{2,3} \sin z_{2,1} \operatorname{cosec} a_2^{1,3} - \cos z_{2,1} \operatorname{ctg} a_2^{1,3}, \\
\operatorname{ctg} K_1^{\mathrm{II}} &= \operatorname{ctg} z_{1,4} \sin z_{1,2} \operatorname{cosec} a_1^{2,4} - \cos z_{1,2} \operatorname{ctg} a_1^{2,4}, \qquad (7) \\
\operatorname{ctg} K_2^{\mathrm{II}} &= \operatorname{ctg} z_{2,4} \sin z_{2,1} \operatorname{cosec} a_2^{1,4} - \cos z_{2,1} \operatorname{ctg} a_2^{1,4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos C_1^{\mathrm{I}} &= \cos a_1^{2,3} \cos K_1^{\mathrm{I}} - \sin a_1^{2,3} \sin K_1^{\mathrm{I}} \cos z_{1,2}, \\
\cos C_2^{\mathrm{I}} &= \cos a_2^{1,3} \cos K_2^{\mathrm{I}} - \sin a_2^{1,3} \sin K_2^{\mathrm{I}} \cos z_{2,1}, \\
\cos C_1^{\mathrm{II}} &= \cos a_1^{2,4} \cos K_1^{\mathrm{II}} - \sin a_1^{2,4} \sin K_1^{\mathrm{II}} \cos z_{1,2}, \qquad (8) \\
\cos C_2^{\mathrm{II}} &= \cos a_2^{1,4} \cos K_2^{\mathrm{II}} - \sin a_2^{1,4} \sin K_2^{\mathrm{II}} \cos z_{2,1}.
\end{aligned}$$

Геометрический смысл углов K, C, γ поясняется рис. 2. Формулы (7) и (8) получены из решения сферических треугольников, построенных на вспомогательной единичной сфере с центром в пункте *1*. Вершинами треугольников являются точки пересечения со сферой отвесных линий и направлений сторон пространственных треугольников. Нижний знак в формулах соответствует случаю, когда оба треуголь-

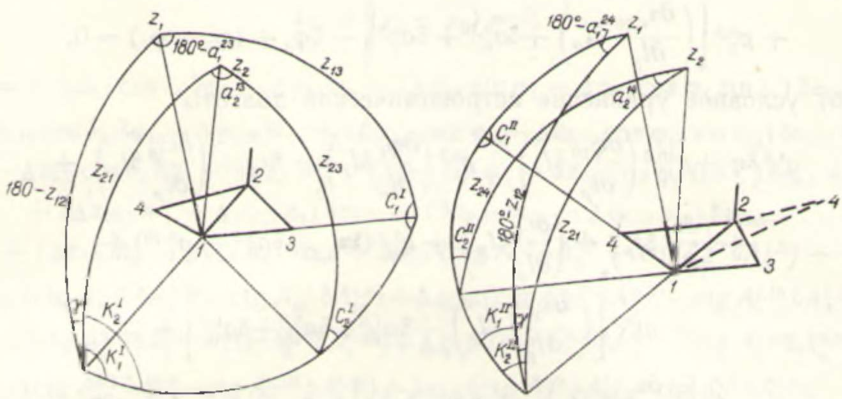

Рис. 2. Взаимные вертикальные плоскости и угол γ между ними.

ника расположены справа от направления *1, 2*. Треугольник *1, 2, 4* для этого случая показан на рисунке штриховыми линиями.

Число условий угла γ равно числу смежных сторон в простой сети треугольников плюс удвоенное число диагоналей, образующих замкнутые цепи треугольников (центральные системы с центром вне полигона или тетраэдры). В фигуре *4, 5, 6, 9* дополнительные два уравнения составляются по диагонали *4, 6* и по одной из смежных сторон *4—5, 5—6, 6—9, 9—4* перекрывающихся треугольников. В центральной системе *1, 2, 8, 10, 7* диагональ *2, 7* вызывает указанные условия по сторонам *1, 2* и *7, 1*. Чтобы получить конкретный вид уравнения, например, для стороны *7, 1* и треугольников *7, 1, 10* и *7, 1, 2* нужно в формулах (6), (7), (8) вместо индексов *1, 2, 3, 4* у величин A, z, a, δz, δa поставить соответственно *7, 1, 10, 2* и сохранить нижний знак.

Условные уравнения астрономических широт, астрономических долгот и астрономических азимутов возникают при наличии в сети избыточных определений астрономических координат и азимутов. Общий вид уравнений и порядок их составления описан в работе [2]. В нашем примере между пунктами *1* и *5* возникает по одному уравнению каждого вида.

Для передачи астрономических координат и азимута с пункта *1* на пункт *5* намечаем ходовую линию. Чтобы уменьшить объем вычислений, целесообразно избрать кратчайший путь. На рис. 1 ходовая линия отмечена штрихами. Треугольники, элементы которых используются для перехода от прямого азимута стороны ходовой линии к обратному, а также для передачи астрономических координат, занумерованы и покрыты штриховкой. Выбор этих треугольников в некоторых случаях может быть различным. Например, вместо треугольника *6, 9, 10* можно взять треугольник *6, 7, 10*, вместо треугольника *1, 8, 10* — треугольник *1, 7, 10*. При указанном выборе ходовой линии рассматриваемые уравнения запишутся так:

а) условное уравнение астрономической широты

$$p_1^{1,5}\delta\varphi_1+p_1^{10,5}\left(\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1+p_1^{6,5}\left(\frac{\partial\varphi_6}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2+\left(\frac{\partial\varphi_5}{\partial l_p}\delta l_p\right)_3+$$

$$+p_3^{1,5}(\delta\alpha_{1,2}+\delta a_1^{2,8}+\delta a_1^{8,10})+p_3^{10,5}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{10,1}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1+\delta a_{10}^{1,8}+\delta a_{10}^{8,9}+\delta a_{10}^{6,9}\right]+$$

$$+p_3^{6,5}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{6,10}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2+\delta a_6^{9,10}+\delta a_6^{5,9}\right]-\delta\varphi_5+(\varphi_5'-\varphi_5)=0, \qquad (9)$$

б) условное уравнение астрономической долготы

$$q_1^{1,5}\delta\varphi_1+q_1^{10,5}\left(\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1+q_1^{6,5}\left(\frac{\partial\varphi_6}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2+\delta\lambda_1+\left(\frac{\partial\lambda_{10}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1+$$

$$+\left(\frac{\partial\lambda_6}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2+\left(\frac{\partial\lambda_5}{\partial l_p}\delta l_p\right)_3+q_3^{1,5}(\delta\alpha_{1,2}+\delta a_1^{2,8}+\delta a_1^{8,10})+$$

$$+q_3^{10,5}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{10,1}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1+\delta a_{10}^{1,8}+\delta a_{10}^{8,9}+\delta a_{10}^{6,9}\right]+$$

$$+q_3^{6,5}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{6,10}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2+\delta a_6^{9,10}+\delta a_6^{5,9}\right]-\delta\lambda_5+(\lambda_5'-\lambda_5)=0, \qquad (10)$$

в) условное уравнение астрономического азимута

$$r_1^{1,5}\delta\varphi_1+r_1^{10,5}\left(\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1+r_1^{6,5}\left(\frac{\partial\varphi_6}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2+$$

$$+r_3^{1,5}(\delta\alpha_{1,2}+\delta a_1^{2,8}+\delta a_1^{8,10})+r_3^{10,5}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{10,1}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1+\delta a_{10}^{1,8}+\delta a_{10}^{8,9}+\delta a_{10}^{6,9}\right]+$$

$$+r_3^{6,5}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{6,10}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2+\delta a_6^{9,10}+\delta a_6^{5,9}\right]+\left[\left(\frac{\partial\alpha_{5,6}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_3+\delta a_5^{6,9}+\delta a_5^{4,9}\right]-$$

$$-\delta\alpha_{5,4}+(\alpha_{5,4}'-\alpha_{5,4})=0. \qquad (11)$$

В уравнениях (9), (10), (11) символы $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l_p}\delta l_p\right)_i$, $\left(\frac{\partial\lambda}{\partial l_p}\delta l_p\right)_i$, $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial l_p}\delta l_p\right)_i$ означают суммы произведений частных производных от рассматриваемых функций (φ, λ, α) по измеренным элементам треугольников (зенитным расстояниям и горизонтальным углам) на соответствующие поправки этих элементов. Индекс i у скобок указывает номер треугольника. Величины p, q, r являются функциями астрономических координат вершин ходовой линии. Формулы для передачи астрономических координат, для вычисления частных производных и коэффициентов p, q, r приведены в работе [2].

Координатные условные уравнения возникают при наличии в сети двух и более несмежных пунктов с жесткими значениями пространственных координат B, L, H или x, y, z. Их можно составить в геодезических и в декартовых координатах. Мы остановимся на втором варианте.

Порядок составления и общий вид координатных условных уравнений описаны в работе [3]. В нашем примере три уравнения лучше составить между пунктами *1* и *5*. Для передачи декартовых координат с пункта *1* на пункт *5* необходимо наметить ходовую линию. Следует также зафиксировать треугольники, элементы которых будут принимать участие в вычислении астрономических координат и азимутов для вершин выбранной ходовой линии. Пусть ходовая линия проходит через пункты *1, 10, 6, 5*, а указанными треугольниками являются треугольники с номерами *1* и *2*. Тогда рассматриваемые условные уравнения можно будет записать так:

а) условное уравнение абсцисс

$$\Delta x_5' + (x_5' - x_5) = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta x_5' = &-\Delta z_{5,1}\cos\lambda_1\,\delta\varphi_1 - \Delta y_{5,1}\,\delta\lambda_1 + (\Delta y_{5,1}\sin\varphi_1 - \Delta z_{5,1}\cos\varphi_1\sin\lambda_1)\,\delta\alpha_{1,10} -\\
&-\Delta z_{5,10}\cos\lambda_{10}\,\delta\varphi_{10} - \Delta y_{5,10}\,\delta\lambda_{10} + (\Delta y_{5,10}\sin\varphi_{10} - \Delta z_{5,10}\cos\varphi_{10}\sin\lambda_{10})\,\delta\alpha_{10,6}\,\delta -\\
&-\Delta z_{5,6}\cos\lambda_6\,\delta\varphi_6 - \Delta y_{5,6}\,\delta\lambda_6 + (\Delta y_{5,6}\sin\varphi_6 - \Delta z_{5,6}\cos\varphi_6\sin\lambda_6)\,\delta\alpha_{6,5} +\\
&+(\Delta z_{10,1}m_1 - \Delta y_{10,1}n_1)\,\delta z_{1,10} + (\Delta z_{6,10}m_{10} - \Delta y_{6,10}n_{10})\,\delta z_{10,6} +\\
&+(\Delta z_{5,6}m_6 - \Delta y_{5,6}n_6)\,\delta z_{6,5} + \Delta x_{5,1}(\operatorname{ctg}A_2^{1,8}\,\delta A_2^{1,8} - \operatorname{ctg}A_8^{1,2}\,\delta A_8^{1,2}) +\\
&+\Delta x_{5,1}(\operatorname{ctg}A_8^{1,10}\,\delta A_8^{1,10} - \operatorname{ctg}A_{10}^{1,8}\,\delta A_{10}^{1,8}) + \Delta x_{5,10}(\operatorname{ctg}A_1^{8,10}\,\delta A_1^{8,10} - \operatorname{ctg}A_8^{1,10}\,\delta A_8^{1,10}) +\\
&+\Delta x_{5,10}(\operatorname{ctg}A_8^{9,10}\,\delta A_8^{9,10} - \operatorname{ctg}A_9^{8,10}\,\delta A_9^{8,10}) + \Delta x_{5,10}(\operatorname{ctg}A_9^{6,10}\,\delta A_9^{6,10} - \operatorname{ctg}A_6^{9,10}\,\delta A_6^{9,10}) +\\
&+\Delta x_{5,6}(\operatorname{ctg}A_{10}^{6,9}\,\delta A_{10}^{6,9} - \operatorname{ctg}A_9^{6,10}\,\delta A_9^{6,10}) + \Delta x_{5,6}(\operatorname{ctg}A_9^{5,6}\,\delta A_9^{5,6} - \operatorname{ctg}A_5^{6,9}\,\delta A_5^{6,9}),
\end{aligned} \tag{12}$$

б) условное уравнение ординат

$$\Delta y_5' + (y_5' - y_5) = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta y_5' = &-\Delta z_{5,1}\sin\lambda_1\,\delta\varphi_1 + \Delta x_{5,1}\,\delta\lambda_1 + (\Delta z_{5,1}\cos\varphi_1\cos\lambda_1 - \Delta x_{5,1}\sin\varphi_1)\,\delta\alpha_{1,10} -\\
&-\Delta z_{5,10}\sin\lambda_{10}\,\delta\varphi_{10} + \Delta x_{5,10}\,\delta\lambda_{10} + (\Delta z_{5,10}\cos\varphi_{10}\cos\lambda_{10} - \Delta x_{5,10}\sin\varphi_{10})\,\delta\alpha_{10,6} -\\
&-\Delta z_{5,6}\sin\lambda_6\,\delta\varphi_6 + \Delta x_{5,6}\,\delta\lambda_6 + (\Delta z_{5,6}\cos\varphi_6\cos\lambda_6 - \Delta x_{5,6}\sin\varphi_6)\,\delta\alpha_{6,5} +\\
&+(\Delta x_{10,1}n_1 - \Delta z_{10,1}l_1)\,\delta z_{1,10} + (\Delta x_{6,10}n_{10} - \Delta z_{6,10}l_{10})\,\delta z_{10,6} +\\
&+(\Delta x_{5,6}n_6 - \Delta z_{5,6}l_6)\,\delta z_{6,5} + \Delta y_{5,1}(\operatorname{ctg}A_2^{1,8}\,\delta A_2^{1,8} - \operatorname{ctg}A_8^{1,2}\,\delta A_8^{1,2}) +\\
&+\Delta y_{5,1}(\operatorname{ctg}A_8^{1,10}\,\delta A_8^{1,10} - \operatorname{ctg}A_{10}^{1,8}\,\delta A_{10}^{1,8}) + \Delta y_{5,10}(\operatorname{ctg}A_1^{8,10}\,\delta A_1^{8,10} - \operatorname{ctg}A_8^{1,10}\,\delta A_8^{1,10}) +\\
&+\Delta y_{5,10}(\operatorname{ctg}A_8^{9,10}\,\delta A_8^{9,10} - \operatorname{ctg}A_9^{8,10}\,\delta A_9^{8,10}) + \Delta y_{5,10}(\operatorname{ctg}A_9^{6,10}\,\delta A_9^{6,10} -\\
&-\operatorname{ctg}A_6^{9,10}\,\delta A_6^{9,10}) + \Delta y_{5,6}(\operatorname{ctg}A_{10}^{6,9}\,\delta A_{10}^{6,9} - \operatorname{ctg}A_9^{6,10}\,\delta A_9^{6,10}) +\\
&+\Delta y_{5,6}(\operatorname{ctg}A_9^{5,6}\,\delta A_9^{5,6} - \operatorname{ctg}A_5^{6,9}\,\delta A_5^{6,9}),
\end{aligned} \tag{13}$$

в) условное уравнение аппликат

$$\Delta z_5' + (z_5' - z_5) = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta z_5' = &(\Delta x_{5,1}\cos\lambda_1 + \Delta y_{5,1}\sin\lambda_1)\,\delta\varphi_1 - (\Delta y_{5,1}\cos\varphi_1\cos\lambda_1 -\\
&-\Delta x_{5,1}\cos\varphi_1\sin\lambda_1)\,\delta\alpha_{1,10} + (\Delta x_{5,10}\cos\lambda_{10} + \Delta y_{5,10}\sin\lambda_{10})\,\delta\varphi_{10} -\\
&-(\Delta y_{5,10}\cos\varphi_{10}\cos\lambda_{10} - \Delta x_{5,10}\cos\varphi_{10}\sin\lambda_{10})\,\delta\alpha_{10,6} +\\
&+(\Delta x_{5,6}\cos\lambda_6 + \Delta y_{5,6}\sin\lambda_6)\,\delta\varphi_6 - (\Delta y_{5,6}\cos\varphi_6\cos\lambda_6 - \Delta x_{5,6}\cos\varphi_6\sin\lambda_6)\,\delta\alpha_{6,5} +\\
&+(\Delta y_{10,1}l_1 - \Delta x_{10,1}m_1)\,\delta z_{1,10} + (\Delta y_{6,10}l_{10} - \Delta x_{6,10}m_{10})\,\delta z_{10,6} +\\
&+(\Delta y_{5,6}l_6 - \Delta x_{5,6}m_6)\,\delta z_{6,5} + \Delta z_{5,1}(\operatorname{ctg}A_2^{1,8}\,\delta A_2^{1,8} - \operatorname{ctg}A_8^{1,2}\,\delta A_8^{1,2}) +\\
&+\Delta z_{5,1}(\operatorname{ctg}A_8^{1,10}\,\delta A_8^{1,10} - \operatorname{ctg}A_{10}^{1,8}\,\delta A_{10}^{1,8}) +\\
&+\Delta z_{5,10}(\operatorname{ctg}A_1^{8,10}\,\delta A_1^{8,10} - \operatorname{ctg}A_8^{1,10}\,\delta A_8^{1,10}) + \Delta z_{5,10}(\operatorname{ctg}A_8^{9,10}\,\delta A_8^{9,10} - \operatorname{ctg}A_9^{8,10}\,\delta A_9^{8,10}) +
\end{aligned} \tag{14}$$

$$+\Delta z_{5,10}(\operatorname{ctg} A_9^{6,10}\,\delta A_9^{6,10}-\operatorname{ctg} A_6^{9,10}\,\delta A_6^{9,10})+$$

$$+\Delta z_{5,6}(\operatorname{ctg} A_{10}^{6,9}\,\delta A_{10}^{6,9}-\operatorname{ctg} A_9^{6,10}\,\delta A_9^{6,10})+\Delta z_{5,6}(\operatorname{ctg} A_9^{5,6}\,\delta A_9^{5,6}-\operatorname{ctg} A_5^{6,9}\,\delta A_5^{6,9}).$$

В формулах (12), (13), (14) поправки астрономических координат и угловых элементов выражены в радианах. Величины l_i, m_i, n_i определяются формулами

$$l_i=\sin\lambda_i\cos\alpha_{ik}-\sin\varphi_i\cos\lambda_i\sin\alpha_{ik},$$

$$m_i=-\cos\lambda_i\cos\alpha_{ik}-\sin\varphi_i\sin\lambda_i\sin\alpha_{ik},$$

$$n_i=\cos\varphi_i\sin\alpha_{ik},$$

где i и k соответственно номера начальной и конечной вершин стороны ходовой линии. Величины Δx, Δy, Δz с соответствующими индексами суть разности вычисленных координат вершин ходовой линии, например

$$\Delta x_{5,1}=x_5'-x_1',\quad \Delta z_{6,10}=z_6'-z_{10}'.$$

Поправки $\delta\varphi_i$, $\delta\lambda_i$ астрономических координат вершин ходовой линии и поправки $\delta\alpha_{ik}$ астрономических азимутов ее сторон являются функциями поправок горизонтальных углов и зенитных расстояний, принимавших участие в передаче астрономических координат и азимутов по этой линии, и определяются выражениями

$$\delta\varphi_{10}=\left(\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1,\quad \delta\lambda_{10}=\left(\frac{\partial\lambda_{10}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1,$$

$$\delta\varphi_6=\left(\frac{\partial\varphi_6}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2,\quad \delta\lambda_6=\left(\frac{\partial\lambda_6}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2,$$

$$\delta\alpha_{1,10}=\delta\alpha_{1,2}+\delta a_1^{2,8}+\delta a_1^{8,10},$$

$$\delta\alpha_{10,6}=\left(\frac{\partial\alpha_{10,1}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1+\delta a_{10}^{1,8}+\delta a_{10}^{8,9}+\delta a_{10}^{6,9},$$

$$\delta\alpha_{6,5}=\left(\frac{\partial\alpha_{6,10}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2+\delta a_6^{9,10}+\delta a_6^{4,9}+\delta a_6^{4,5}.$$

Поправки δA_i^{jk} плоских углов следует, конечно, выразить через поправки соответствующих зенитных расстояний и горизонтальных углов.

Если считать, что длина $s_{1,2}$ стороны *1*, *2* получена из измерений и из уравнивания нужно найти ее поправку, то в выражения (12), (13), (14) следует ввести соответственно члены

$$\Delta x_{5,1}\frac{10^{-6}}{\mu}\delta\lg s_{1,2},\quad \Delta y_{5,1}\frac{10^{-6}}{\mu}\delta\lg s_{1,2},\quad \Delta z_{5,1}\frac{10^{-6}}{\mu}\delta\lg s_{1,2},$$

где $\delta\lg s_{1,2}$ — искомая поправка логарифма $s_{1,2}$, выраженная в единицах шестого знака.

Если жесткими координатами в пункте *5* являются только плановые координаты B_5 и L_5, то между пунктами *1* и *5* будут иметь место условные уравнения геодезической широты и геодезической долготы:

$$\Delta B_5'+(B_5'-B_5)=0,$$

$$\Delta L_5'+(L_5'-L_5)=0. \qquad (15)$$

Составить эти уравнения, не используя формул для передачи геодезических координат, можно следующим образом. Вычислив декартовы координаты x'_5, y'_5, z'_5 пункта *5*, найдем по известным формулам геодезические: B'_5, L'_5, H'_5. В результате этого будут известны свободные члены уравнений (15). Величины $\Delta B'_5$, $\Delta L'_5$ как функции поправок измеренных элементов, принимавших участие в передаче координат по ходовой линии *1, 10, 6, 5*, получим с помощью формул

$$(M+H)\,\Delta B'_5 = -\sin B\cos L\Delta x'_5 - \sin B\sin L\Delta y'_5 + \cos B\Delta z'_5,$$

$$(N+H)\cos B\Delta L'_5 = -\sin L\Delta x'_5 + \cos L\Delta y'_5, \qquad (16)$$

где $\Delta x'_5$, $\Delta y'_5$, $\Delta z'_5$ определяются выражениями (12), (13), (14), а коэффициенты при поправках вычисляются при $B = B'_5$, $L = L'_5$, $H = H'_5$.

Базисные условные уравнения. Эти уравнения возникают, если в триангуляционной сети имеются избыточные жесткие стороны или избыточные измерения сторон. Составляются аналогично базисным уравнениям в обычной триангуляции. В нашем примере будет два базисных уравнения. Выбирая связующую цепь треугольников по кратчайшему пути, получим следующее условие между сторонами *1, 2* и *4, 5*:

$$s_{4,5} = s_{1,2}\frac{\sin A_1^{2,8}\sin A_2^{3,8}\sin A_8^{3,9}\sin A_3^{4,9}\sin A_9^{4,5}}{\sin A_8^{1,2}\sin A_3^{2,8}\sin A_9^{3,8}\sin A_4^{3,9}\sin A_5^{4,9}},$$

откуда вытекает условное уравнение между поправками плоских углов

$$\operatorname{ctg} A_1^{2,8}\delta A_1^{2,8} + \operatorname{ctg} A_2^{3,8}\delta A_2^{3,8} + \operatorname{ctg} A_8^{3,9}\delta A_8^{3,9} + \operatorname{ctg} A_3^{4,9}\delta A_3^{4,9} +$$

$$+ \operatorname{ctg} A_9^{4,5}\delta A_9^{4,5} - \operatorname{ctg} A_8^{1,2}\delta A_8^{1,2} - \operatorname{ctg} A_3^{2,8}\delta A_3^{2,8} - \operatorname{ctg} A_9^{3,8}\delta A_9^{3,8} - \qquad (17)$$

$$- \operatorname{ctg} A_4^{3,9}\delta A_4^{3,9} - \operatorname{ctg} A_5^{4,9}\delta A_5^{4,9} + \frac{\rho''}{\mu}(\lg s'_{4,5} - \lg s_{4,5}) = 0.$$

Через $s'_{4,5}$ обозначена вычисленная длина стороны *4, 5*. Выразив с помощью формул (3) поправки δA_i^{jk} через поправки зенитных расстояний и горизонтальных углов, получим базисное уравнение в окончательном виде. Так же составляется уравнение между сторонами *1, 2* и *2, 3*.

Если длина какой-либо стороны рассматривается как измеренная и подлежит исправлению, то в уравнения вводится поправка логарифма этой стороны.

Условные уравнения жесткости направлений выходных сторон*. Эти уравнения возникают, если в сети имеется пункт i с известными астрономическими координатами φ_i, λ_i и астрономическим азимутом α_{is} и сторона jk с жесткими пространственными координатами ее конечных точек.

Направление стороны можно определить двумя параметрами: углом Φ_{jk} наклона к плоскости xoy (к плоскости экватора) и двугранным углом Λ_{jk} между плоскостью xoz (плоскостью начального астрономического меридиана) и плоскостью, проходящей через данную сторону параллельно оси вращения Земли.

---

* Уравнения подобного вида, насколько нам известно, не описаны в литературе. Поэтому вопрос об их названии остается открытым. Последнее можно отнести также к уравнениям углов γ, указанным В. И. Рудским.

Истинные значения углов Φ_{jk}, Λ_{jk} вычисляются по формулам

$$\operatorname{tg}\Phi_{jk}=\frac{z_k-z_j}{\sqrt{(x_k-x_j)^2+(y_k-y_j)^2}},$$

$$\operatorname{tg}\Lambda_{jk}=\frac{y_k-y_j}{x_k-x_j}.$$

В то же время эти углы можно получить как функции астрономических координат и азимута в пункте i и угловых элементов триангуляции с помощью выражений

$$\cos\Phi_{jk}\cos\Lambda_{jk}=l_{jk},$$
$$\cos\Phi_{jk}\sin\Lambda_{jk}=m_{jk}, \tag{18}$$
$$\sin\Phi_{jk}=n_{jk},$$

где

$$l_{jk}=\cos z_{jk}\cos\varphi_j\cos\lambda_j-\sin z_{jk}(\sin\lambda_j\sin\alpha_{jk}+\sin\varphi_j\cos\lambda_j\cos\alpha_{jk}),$$
$$m_{jk}=\cos z_{jk}\cos\varphi_j\sin\lambda_j+\sin z_{jk}(\cos\lambda_j\sin\alpha_{jk}-\sin\varphi_j\sin\lambda_j\cos\alpha_{jk}),$$
$$n_{jk}=\cos z_{jk}\sin\varphi_j+\sin z_{jk}\cos\varphi_j\cos\alpha_{jk}. \tag{19}$$

Астрономические координаты φ_j, λ_j и азимут α_{jk}, необходимые для вычисления направляющих косинусов l_{jk}, m_{jk}, n_{jk}, должны быть получены передачей с пункта i по выбранной ходовой линии.

Уравнение жесткости направления выходной стороны выражает требование, чтобы величины Φ и Λ, вычисленные по вероятнейшим значениям угловых элементов сети и астрономических данных, равнялись их истинным значениям. В общем виде для стороны jk их можно записать так:

$$\Delta\arcsin n_{jk}+(\Phi'_{jk}-\Phi_{jk})=0,$$

$$\Delta\operatorname{arctg}\frac{m_{jk}}{l_{jk}}+(\Lambda'_{jk}-\Lambda_{jk})=0.$$

Выразив с помощью формул (18) и (19) первые члены слева через поправки $\delta\varphi_j$, $\delta\lambda_j$, $\delta\alpha_{jk}$ вычисленных для пункта j астрономических координат и астрономического азимута, а также через поправку δz_{jk} зенитного расстояния, получим после некоторых преобразований:

$$\cos(\Lambda_{jk}-\lambda_j)\delta\varphi_j-\cos\varphi_j\sin(\Lambda_{jk}-\lambda_j)\delta\alpha_{jk}-\cos P_{jk}\delta z_{jk}+(\Phi'_{jk}-\Phi_{jk})=0, \tag{20}$$

$$\operatorname{tg}\Phi_{jk}\sin(\Lambda_{jk}-\lambda_j)\delta\varphi_j+\delta\lambda_j+[-\sin\varphi_j+\operatorname{tg}\Phi_{jk}\cos\varphi_j\cos(\Lambda_{jk}-\lambda_j)]\delta\alpha_{jk}+$$
$$+\sec\Phi_{jk}\sin P_{jk}\delta z_{jk}+(\Lambda'_{jk}-\Lambda_{jk})=0, \tag{21}$$

где

$$\cos P_{jk}=-\cos(\Lambda_{jk}-\lambda_j)\cos\alpha_{jk}+\sin\varphi_j\sin(\Lambda_{jk}-\lambda_j)\sin\alpha_{jk},$$

$$\sin P_{jk}=\sec\Phi_{jk}\cos\varphi_j\sin\alpha_{jk}.$$

Предположим, что в пункте 5 не было астроопределений. Тогда в уравнениях (20) и (21), составленных для стороны 5, 4 ($i=1$, $j=5$, $k=4$), поправки $\delta\varphi_5$, $\delta\lambda_5$, $\delta\alpha_{5,4}$ нужно выразить через поправки $\delta\varphi_1$, $\delta\lambda_1$, $\delta\alpha_{1,2}$ астрономических координат и азимута в пункте 1 и поправки угловых элементов триангуляции, принимавших участие в передаче астрономических координат и азимута с пункта 1 на пункт 5. Рассматривая ходовую линию *1, 10, 6, 5* и треугольники *1, 2, 3*, получим после ряда преобразований:

$$\cos(A_{5,4}-\lambda_1)\,\delta\varphi_1+\cos(A_{5,4}-\lambda_{10})\,\delta\varphi_{10}+\cos(A_{5,4}-\lambda_6)\,\delta\varphi_6+$$
$$+\cos(A_{5,4}-\lambda_5)\,\delta\varphi_5-\cos\varphi_1\sin(A_{5,4}-\lambda_1)\,\delta\alpha_{1,10}-\cos\varphi_{10}\sin(A_{5,4}-\lambda_{10})\,\delta\alpha_{10,6}-$$
$$-\cos\varphi_6\sin(A_{5,4}-\lambda_6)\,\delta\alpha_{6,5}-\cos\varphi_5\sin(A_{5,4}-\lambda_5)\,\delta\alpha_{5,4}- \qquad (22)$$
$$-\cos P_{5,4}\,\delta z_{5,4}+(\Phi'_{5,4}-\Phi_{5,4})=0,$$

$$\operatorname{tg}\Phi_{5,4}\sin(A_{5,4}-\lambda_1)\,\delta\varphi_1+\operatorname{tg}\Phi_{5,4}\sin(A_{5,4}-\lambda_{10})\,\delta\varphi_{10}+$$
$$+\operatorname{tg}\Phi_{5,4}\sin(A_{5,4}-\lambda_6)\,\delta\varphi_6+\operatorname{tg}\Phi_{5,4}\sin(A_{5,4}-\lambda_5)\,\delta\varphi_5+\delta\lambda_1+\delta\lambda_{10}+$$
$$+\delta\lambda_6+\delta\lambda_5+[-\sin\varphi_1+\operatorname{tg}\Phi_{5,4}\cos\varphi_1\cos(A_{5,4}-\lambda_1)]\,\delta\alpha_{1,10}+$$
$$+[-\sin\varphi_{10}+\operatorname{tg}\Phi_{5,4}\cos\varphi_{10}\cos(A_{5,4}-\lambda_{10})]\,\delta\alpha_{10,6}+ \qquad (23)$$
$$+[-\sin\varphi_6+\operatorname{tg}\Phi_{5,4}\cos\varphi_6\cos(A_{5,4}-\lambda_6)]\,\delta\alpha_{6,5}+$$
$$+[-\sin\varphi_5+\operatorname{tg}\Phi_{5,4}\cos\varphi_5\cos(A_{5,4}-\lambda_5)]\,\delta\alpha_{5,4}+$$
$$+\sec\Phi_{5,4}\sin P_{5,4}\,\delta z_{5,4}+(A'_{5,4}-A_{5,4})=0,$$

где

$$\delta\varphi_{10}=\left(\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1,\quad \delta\varphi_6=\left(\frac{\partial\varphi_6}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2,\quad \delta\varphi_5=\left(\frac{\partial\varphi_5}{\partial l_p}\delta l_p\right)_3,$$
$$\delta\alpha_{1,10}=\delta\alpha_{1,2}+\delta a_1^{2,8}+\delta a_1^{8,10},$$
$$\delta\alpha_{10,6}=\left(\frac{\partial\alpha_{10,1}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1+\delta a_{10}^{1,8}+\delta a_{10}^{8,9}+\delta a_{10}^{6,9},$$
$$\delta\alpha_{6,5}=\left(\frac{\partial\alpha_{6,10}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2+\delta a_6^{9,10}+\delta a_6^{4,9}+\delta a_6^{4,5},$$
$$\delta\alpha_{5,4}=\left(\frac{\partial\alpha_{5,6}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_3+\delta a_5^{6,9}+\delta a_5^{4,9},$$
$$\delta\lambda_{10}=\left(\frac{\partial\lambda_{10}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1,\quad \delta\lambda_6=\left(\frac{\partial\lambda_6}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2,\quad \delta\lambda_5=\left(\frac{\partial\lambda_5}{\partial l_p}\delta l_p\right)_3.$$

Закономерность в построении уравнений (22), (23) очевидна. Поэтому их нетрудно записать для любой сети и любого выбора ходовой линии.

В нашем примере рассматриваемые уравнения следует составить для сторон *1—2, 2—3* и астропункта *1*, а также для стороны *5—4* и астропункта *5*.

Сторона *1, 2* $(i=1,\ j=1,\ k=2)$:

$$\cos(A_{1,2}-\lambda_1)\,\delta\varphi_1-\cos\varphi_1\sin(A_{1,2}-\lambda_1)\,\delta\alpha_{1,2}-$$
$$-\cos P_{1,2}\,\delta z_{1,2}+(\Phi'_{1,2}-\Phi_{1,2})=0, \qquad (24)$$
$$\operatorname{tg}\Phi_{1,2}\sin(A_{1,2}-\lambda_1)\,\delta\varphi_1+\delta\lambda_1+[-\sin\varphi_1+\operatorname{tg}\Phi_{1,2}\cos\varphi_1\cos(A_{1,2}-\lambda_1)]\,\delta\alpha_{1,2}+$$
$$+\sec\Phi_{1,2}\sin P_{1,2}\,\delta z_{1,2}+(A'_{1,2}-A_{1,2})=0. \qquad (25)$$

Сторона *2, 3* $(i=1,\ j=2,\ k=3)$:

$$\cos(A_{2,3}-\lambda_1)\,\delta\varphi_1-\cos(A_{2,3}-\lambda_2)\,\delta\varphi_2-\cos\varphi_1\sin(A_{2,3}-\lambda_1)\,\delta\alpha_{1,2}-$$
$$-\cos\varphi_2\sin(A_{2,3}-\lambda_2)\,\delta\alpha_{2,3}-\cos P_{2,3}\,\delta z_{2,3}+(\Phi'_{2,3}-\Phi_{2,3})=0, \qquad (26).$$

$$\operatorname{tg}\Phi_{2,3}\sin(\Lambda_{2,3}-\lambda_1)\,\delta\varphi_1+\operatorname{tg}\Phi_{2,3}\sin(\Lambda_{2,3}-\lambda_2)\,\delta\varphi_2+\delta\lambda_1+\delta\lambda_2+$$
$$+[-\sin\varphi_1+\operatorname{tg}\Phi_{2,3}\cos\varphi_1\cos(\Lambda_{2,3}-\lambda_1)]\,\delta\alpha_{1,2}+ \qquad (27)$$
$$+[-\sin\varphi_2+\operatorname{tg}\Phi_{2,3}\cos\varphi_2\cos(\Lambda_{2,3}-\lambda_2)]\,\delta\alpha_{2,3}+$$
$$+\sec\Phi_{2,3}\sin P_{2,3}\,\delta z_{2,3}+(\Lambda'_{2,3}-\Lambda_{2,3})=0,$$

где
$$\delta\varphi_2=\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial l_p}\delta l_p\right)_{1,2,8},\quad \delta\lambda_2=\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial l_p}\delta l_p\right)_{1,2,8},$$
$$\delta\alpha_{2,3}=\left(\frac{\partial\alpha_{2,1}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_{1,2,8}-\delta a_2^{1,7}-\delta a_2^{7,8}-\delta a_2^{3,8}.$$

Аналогично составляются уравнения для астропункта *5* и стороны *5, 4* ($i=5$, $j=5$, $k=4$).

Заметим, что уравнения жесткости направлений выходных сторон совместно с базисными уравнениями заменяют в некоторых случаях координатные условные уравнения.

Итак, в нашей сети имеем по отдельным видам следующие условные уравнения:

уравнения фигур	14,
уравнения горизонта	3,
боковые уравнения	5,
уравнения угла между взаимными вертикальными плоскостями	18,
уравнения астрономических координат и азимутов	3,
координатные уравнения	3,
базисные уравнения	2,
уравнения жесткости направлений выходных сторон	6.

Всего 54 условных уравнения, что соответствует вычислению по расчетной формуле.

Выше мы предполагали, что зенитные расстояния свободны от влияния вертикальной рефракции. Поскольку в действительности это не имеет места, необходимо прежде чем выполнять уравнивание учесть это влияние тем или иным известным способом.

Определение поправок к принятым значениям коэффициентов вертикальной рефракции. При достаточном количестве избыточных измерений имеется возможность определить на каждом пункте дополнительную неизвестную величину, характеризующую рефракцию и не зависящую от азимута, например, поправку к принятому для данного пункта значению k_0^i коэффициента вертикальной рефракции [5]. Для этого достаточно в условных уравнениях поправки δz_{ij} зенитных расстояний заменить суммами

$$\delta z_{ij}+\frac{s_{ij}}{2R}\,\delta k_0^i,$$

где i — номер пункта, для которого определяется поправка. Получим систему условных уравнений с дополнительными неизвестными, решение которой выполняется известными методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудский В. И. Совместное уравнивание горизонтальных углов и зенитных расстояний. Республиканский межведомственный научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 5, Изд-во Львов. ун-та, 1966.

2. Филиппов А. Е. Условные уравнения широты, долготы и азимута в сети пространственной триангуляции. Республиканский межведомственный научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 6. Изд-во Львов. ун-та, 1967.

3. Филиппов А. Е. Координатные условные уравнения в сети пространственной триангуляции. Республиканский межведомственный научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 7, Изд-во Львов. ун-та, 1967.

4. K. Ledersteger. Astronomische und physikalische Geodäsie (Erdmessung), Handbuch der Vermessungskunde, Bd. V, Stuttgart, 1957.

5. Hotine Martin. A primer of non-classical geodesy. A. J. G. Venice, 1959.

Работа поступила
13 марта 1967 года.