

## О ПОГРЕШНОСТЯХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ МАСШТАБОВ

В последнее время значительное развитие получили прямые методы преобразования прямоугольных координат в пространстве [2, 3], параметры которых находят в два этапа: вычисление элементов некоторой квазиортогональной матрицы; ортонормирование этой матрицы.

До вычисления элементов квазиортогональной матрицы определяют и учитывают масштаб, поэтому уменьшение квазиортогональности зависит и от его точности.

Согласно теории ошибок [1], наименьшие погрешности имеют средние (средневесовые) значения величин. Поэтому цель данной статьи — исследовать применительно к космическим сетям точность различных формул определения средних (средневесовых)

значений масштаба и выработать рекомендации по их использованию.

Задача определения масштаба в космических сетях уже рассматривалась в печати [4, 5], но вопрос о среднем значении масштаба в космических сетях здесь затрагивается впервые.

Поскольку масштаб и средняя квадратическая ошибка обозначаются в геодезии одной и той же буквой  $m$ , будем помечать масштаб, как принято в математической картографии, греческой буквой  $\mu$ . Для удобства будем также обозначать среднее значение



Прямолинейный отрезок для определения средних значений линейных масштабов.

масштаба, определенное по  $i$ -й формуле,  $\mu_i$ , среднюю квадратическую погрешность его  $M_\mu$ , среднюю квадратическую ошибку масштаба  $\mu_{ij}$  любой линии —  $m_\mu$ .

Для определения среднего значения масштаба предложена формула [3]

$$\mu_1 = [\mu_{ij}] / N, \quad (1)$$

где  $N$  — число линий в сети, содержащей  $n$  пунктов, причем  $N = n(n-1)/2$ .

Пусть дан прямолинейный отрезок (см. рисунок), содержащий пункты  $P_i$  и  $P_j$ , на котором произвольно выбрана точка  $P_k$ . Тогда

$$\mu_{cp} = S'_{ij} / S_{ij} = (S'_{ik} + S'_{kj}) / (S_{ik} + S_{kj}),$$

где  $S'$  и  $S$  — длины линий в новой и старой системах соответственно. Применяя эту формулу к  $n$  пунктам, не лежащим на одной прямой, получаем

$$\mu_2 = \frac{[S'_{ij}]}{[S_{ij}]} = \frac{[\mu_{ij} S_{ij}]}{[S_{ij}]} \quad (2)$$

Среднее весовое значение масштаба предложено находить по формуле [7]

$$\mu_3 = [\mu_{ij} S_{ij}^2] / [S_{ij}^2], \quad (3)$$

и, наконец, среднее весовое значение масштаба можно определить по формуле

$$\mu_4 = [\mu_{ij} P_{ij}] / [P_{ij}], \quad (4)$$

где  $P = 1/m_\mu^2$  — вес масштаба. Если принять  $P_{ij} = S_{ij}$  или  $P_{ij} = S_{ij}^2$ , то получим соответственно (2) и (3).

Пользуясь известной формулой

$$m_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)^2 m_{X_i}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial X_j}\right)^2 m_{X_j}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Y_i}\right)^2 m_{Y_i}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Y_j}\right)^2 m_{Y_j}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Z_i}\right)^2 m_{Z_i}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Z_j}\right)^2 m_{Z_j}^2} \quad (5)$$

применительно к функции

$$F = S_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2}, \quad (6)$$

найдем зависимость между средней квадратической ошибкой расстояния  $m_S$  и средними квадратическими ошибками координат пунктов ( $m_X, m_Y, m_Z$ ):

$$m_S = \sqrt{\cos^2 \alpha (m_{X_i}^2 + m_{X_j}^2) + \cos^2 \beta (m_{Y_i}^2 + m_{Y_j}^2) + \cos^2 \gamma (m_{Z_i}^2 + m_{Z_j}^2)} = \sqrt{\cos^2 \alpha \cdot m_{\Delta X_{ij}}^2 + \cos^2 \beta \cdot m_{\Delta Y_{ij}}^2 + \cos^2 \gamma m_{\Delta Z_{ij}}^2}, \quad (7)$$

в которой  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы прямой  $S_{ij}$  и осей координат.

Зная средние квадратические ошибки линий, определим среднюю квадратическую ошибку масштаба. Для функции вида  $\mu = S' : S$  можно записать [1]

$$(m_\mu / \mu_{ij})^2 = (m_{S'} / S')^2 + (m_S / S)^2. \quad (8)$$

После преобразования получаем

$$m_\mu = \frac{\sqrt{m_{S'}^2 + \mu_{ij}^2 m_S^2}}{S_{ij}^2}. \quad (9)$$

Так как в векторных ходах, а также сетях космической триангуляции и трилатерации масштаб незначительно ( $10^{-5} \dots 10^{-6}$ ) отличается от единицы, а погрешности  $m_S$  меньше 1 км, запишем (9) в виде

$$m_\mu = \sqrt{(m_{S'}^2 + m_S^2) / S^2}. \quad (10)$$

Следовательно, квадрат средней квадратической ошибки масштаба прямо пропорционален сумме квадратов средних квадратических ошибок линий в обеих системах и обратно пропорционален квадрату расстояния.

Координаты пунктов и их погрешности взяты для последующих вычислений из [8], где опубликованы результаты уравнения триангуляции и трилатерации по способу наименьших квадратов в пространственных декартовых координатах.

На основании (9) получим выражения для средних квадратических ошибок средних масштабов

$$M_{\mu_1} = \frac{1}{n} \sqrt{[m_\mu^2]} = \frac{1}{n} \sqrt{\left[ \frac{m_{S'}^2 + m_S^2}{S_{ij}^2} \right]}; \quad (11)$$

$$M_{\mu_2} = \frac{1}{[S_{ij}]} \sqrt{[S_{ij}^2 m_\mu^2]} = \frac{1}{[S_{ij}]} \sqrt{[m_{S'}^2 + \mu_{ij}^2 m_S^2]}; \quad (12)$$

$$M_{\mu_2} = \frac{1}{[S_{ij}^2]} \sqrt{[S_{ij}^2 (m_s^2 + \mu_{ij}^2 m_s^2)]}; \quad (13)$$

$$M_{\mu_1} = \frac{1}{[P_{ij}]} \sqrt{\left[ \frac{S_{ij}^2}{m_s^2 + \mu_{ij}^2 m_s^2} \right]} = \frac{1}{\sqrt{[P_{ij}]}}. \quad (14)$$

Легко видеть, что

$$M_{\mu_1}/M_{\mu_2} = M_{\mu_1} \sqrt{[P_{ij}]}. \quad (15)$$

Подставляя в (11) — (14) некоррелированные погрешности линейных масштабов, можем априори определить ошибки преобра-

#### Результаты вычислений средних квадратических ошибок по (11) — (14)

Число $N$ элементов в сумме	Средние квадратические ошибки $M \cdot 10^5$ и номера используемых формул				
	$M_{\mu_1}$ (11)	$M_{\mu_2}$ (12)	$M_{\mu_3}$ (13)	$M_{\mu_4}$ (14)	$M_{\mu_1} - M_{\mu_4}$ (15)
3	0,4629	0,6646	0,8347	0,2907	1,5925
5	0,4651	0,5030	0,6741	0,1922	2,4204
7	0,3480	0,4120	0,6054	0,1660	2,0957
9	0,3024	0,3668	0,5692	0,1593	1,8987
11	0,3170	0,3351	0,4742	0,1515	2,0925
13	0,2711	0,2813	0,3972	0,1245	2,1768
15	0,2547	0,2189	0,2006	0,0704	3,6175
17	0,2273	0,1921	0,1768	0,0635	3,5779
19	0,2038	0,1559	0,1308	0,0492	4,1451
21	0,1846	0,1381	0,1181	0,0436	4,2374

зованных координат, вызываемые ошибками средних значений масштаба.

Часть результатов вычислений по сравнению средних квадратических ошибок средних значений масштаба, определенных по различным формулам, приведена в таблице. Исходные данные взяты из [8].

На примере космических геодезических сетей экспериментально установлено, что точность среднего масштаба  $\mu_1$  (при  $N \geq 15$ ) ниже точности других средних (средневесовых) масштабов, а погрешности масштабов  $\mu_2$  и  $\mu_3$  незначительно (10...15%) отличаются друг от друга.

Погрешности преобразованных прямоугольных координат (в космической геодезии), вызываемые только ошибками масштабов, могут достигать нескольких десятков метров. Для уменьшения их следует вычислить средние, используя максимальное число исходных масштабов.

Список литературы: 1. *Большаков В. Д., Гайдаев П. А.* Теория математической обработки геодезических измерений. — М.: Недра, 1977. 2. *Буткевич А. В., Кириллов В. Г.* Об определении параметров преобразования пространственных прямоугольных координат. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1982, вып. 35. 3. *Журкин И. Г.* Об одном алгоритме преобразования координат в задачах фотограмметрии. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1980, № 5.

Кириллов В. Г. Характер линейных искажений при преобразованиях координат в трехмерном пространстве. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 30. 5. Крылов В. И. Определение масштаба сети космической триангуляции по фотографическим и лазерным наблюдениям ИСЗ: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М., 1978. 6. Машимов М. М. Космическая геодезия и вопросы теории в геодезии. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1980, № 1. 7. Фототриангуляция с применением электронной цифровой вычислительной машины. — М.: Недра, 1975.

Статья поступила в редколлегию 08.12.83