УДК 52.336+550.312+525.233

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ

К ОБОСНОВАНИЮ ТОЧЕЧНО-ДИПОЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ГЕОПОТЕНЦИАЛА

Модели точечных масс для описания потенциала притяжения Земли успешно используют в космической геодезии, а в последние годы и в физической геодезии. В настоящее время представление потенциала притяжения суммой потенциалов точечных масс наряду с его классическим разложением в ряд шаровых функций широко применяется не только при описании геопотенциала, но и потенциалов других планет, например Луны и Марса. История вопроса, ряд конкретных многоточечных моделей геопотенциала, их обсуждение и использование даны в статьях различных авторов [1, 2, 6]. Ценные качества моделей такого типа общеизвестны, однако выявлены еще не все их возможности, не полностью раскрыты их свойства, поэтому естественны поиски новых методик их построения и попытки создания более совершенных вариантов таких моделей.

Ниже предлагаем новый, специфический тип моделей геопотенциала — точечно-дипольных. Опишем общую схему их построения, которая реализует численное решение потенциалографической задачи в одной ее частной постановке, связанной с развиваемой нами концепцией гравитирующих дисков [4].

Отметим сначала некоторые принципиальные предпосылки к построению предлагаемых моделей потенциала притяжения планеты. Как известно, многоточечные модели потенциала создают с целью такой удобной его аппроксимации, которая без снижения точности его представления усеченным до некоторого порядка рядом шаровых функций позволяет при массовых вычислениях на ЭВМ более экономично получать значения потенциала и производных. При этом использование только точечных масс ничем не лимитируется: в модель допустимо включение и иных гравитирующих объектов, оперирование с которыми было бы также просто и экономично.

Для того чтобы учесть моделью суммарный эффект притяжения огромнейшего количества разбросанных по телу планеты «неоднородностей», а не учитывать влияние каждой из них в отдельности, надо, очевидно, точечные массы или другие заменяющие их объекты располагать как можно ближе к центру масс планеты, либо к ее экваториальной плоскости. Идеальное место их концентрации — фокальный диск общепланетарного эллипсоида. Естественность такого требования следует из простых соображений. Притяжение сферически симметричной планетой внешней точки можно заменить, как установил И. Ньютон, материальной точкой, расположенной в центре масс планеты, скажем, массивным шариком ничтожного радиуса. А для планеты эллипсоидальной формы с эллипсоидально-слоистой структурой такой шарик должен быть сплющен в массивный «эллипсоидик». Согласно классической теории притяжения эллипсоидов, указанный эллипсоидик — это фокальный диск общепланетарного эллипсоида, являющийся предельным положением сплющивающегося эллипсоида, ему софокусного [5].

При указанном подходе к многоточечным моделям не выдерживают критики такие их варианты, в которых массы располагают на оси вращения планеты — на действительных или мнимых расстояниях от ее центра масс. Получаемые при этом в результате математических выкладок «мнимости» этих расстояний или «выскакивания» отдельных точек за пределы планеты, очевидно, являются протестом природы против насилия над ней, ее «инстинктивным» стремлением сбросить с себя неприсущие, но навязываемые ей, законы.

Так как главную часть потенциала, или нормальный потенциал, можно трактовать притяжением центра планеты или фокального диска, причем в каждом из них сконцентрирована вся масса планеты, то оставшаяся поправочная часть потенциала, или возмущающий потенциал, оказывается безмассовым. Такой возмущающий потенциал пропорционален второй степени обратного расстояния. Для его представления невыгодно брать точечные массы, потенциалы которых пропорциональны первой степени этого расстояния. В качестве нужных точечных объектов отмеченному условию удовлетворяют гравитационные диполи, причем очевидно, что последние надо описывать присущей им характеристикой — моментами диполя (дипольными моментами), а не разносить образующие их массы («заряды») на конечные расстояния, как это свойственно приближенным конструкциям диполей.

Заметим, что при построении моделей потенциала, кроме данных о нем самом как об аппроксимируемой функции, желательно еще использовать другие виды информации о планете и в первую очередь о ее внутреннем строении.

Потенциал притяжения планеты

$$V(P)=f\int\limits_{\tau}\frac{\delta_Q\,d\tau_Q}{l_{PQ}} \tag{1}$$

отнесем к прямоугольной системе координат $Oxyz$ с началом O в центре ее масс и с осью Oz, совпадающей с осью вращения. В (1) $P(x, y, z)$ и $Q(\xi, \eta, \zeta)$ — соответственно внешняя и внутренняя точки относительно поверхности σ планеты τ; $l_{PQ}=|\vec{QP}|=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$; $\delta=\delta(\xi, \eta, \zeta)$ — плотность ее недр; f — гравитационная постоянная.

Согласно концепции гравитирующих дисков [4], потенциал $V=V(P)$ можно представить следующей суммой:

$$V=V^*+V'+V'', \tag{2}$$

где в качестве слагаемых фигурируют потенциалы трех плоских слоев, находящихся в экваториальной плоскости планеты. Именно

$$V^*(P) = f \int\limits_{S^*} \frac{\mu^*_Q\, dS^*_Q}{l_{PQ}} - \tag{3}$$

— потенциал фокального диска (ФД), или, подробнее, потенциал простого слоя с плотностью $\mu^* = \mu^*(\xi, \eta)$, расположенного на площади фокального круга S^* (радиус его $\sqrt{a^2 - b^2}$) общепланетарного (двухосного) эллипсоида с полуосями a и b $(a > b)$,

$$V'(P) = f \int\limits_{S} \frac{\mu_Q\, dS_Q}{l_{PQ}} - \tag{4}$$

— потенциал безмассового материального диска (БМД), т. е. потенциал простого слоя плотности $\mu = \mu(\xi, \eta)$, находящегося на площади круга S радиуса $\rho = a - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая величина);

$$V''(P) = f \int\limits_{S} \frac{z_P \nu_Q\, dS_Q}{l^3_{PQ}} - \tag{5}$$

— потенциал дипольного диска (ДД), или, конкретнее, потенциал двойного слоя с моментом $\nu = \nu(\xi, \eta)$, расположенного также на площади круга S.

Центры кругов S^* и S совпадают с центром O масс планеты. Плотности $\mu^*(\xi, \eta)$, $\mu(\xi, \eta)$ и момент $\nu(\xi, \eta)$ полагаем в соответствующих областях принадлежащими к классу функций, интегрируемых с квадратом.

Важно отметить, что относительно координаты z каждый из потенциалов V^* и V' простых слоев является четной функцией, а потенциал V'' двойного слоя — нечетной.

Потенциал V^* фокального диска выражает потенциал данной неэллипсоидальной неоднородной планеты в предположении гидростатически равновесного состояния ее. Он совпадает с потенциалом квазиобщепланетарного (неуровенного) эллипсоида, если последнему приписать надлежащую эллипсоидально слоистую структуру. За счет отмеченных свойств потенциал ФД может быть принят за нормальный потенциал планеты, тем более, что в любой точке P он выражает главную часть ее потенциала: $|V^*| \gg |V'| + |V''|$.

Потенциалы V' безмассового материального диска и V'' дипольного диска — следствия негидростатичности планеты. Они обусловлены отличиями фигуры и внутренней структуры реальной планеты от таковых воображаемой гидростатически равновесной планеты с той же массой, угловой скоростью вращения и полярным радиусом. И, несмотря на то что введенные с аппроксимационной целью оба потенциала V' и V'' «безмассовы», они обладают примечательными свойствами, приводящими к интересным геодинамическим интерпретациям.

Так как потенциал БМД — функция, четная по z, то V' обусловлен такими отклонениями действительной планеты от ее гидростатического состояния, которые симметричны относительно плоскости экватора.

А вследствие того что потенциал ДД — нечетная относительно z функция, последняя описывает те отличия реальной планеты от гидростатически равновесной, которые асимметричны по отношению к ее экваториальной плоскости.

Отметим, наконец, существенное для последующего обстоятельство. Если потенциал планеты задан набором стоксовых постоянных C_{nm} и S_{nm}, то потенциал ее ФД (нормальный потенциал планеты) содержит в своем разложении все C_{n0} при n-четном, потенциал МД — те C_{nm} и S_{nm}, у которых $n-m$ или $n+m$ суть четные числа, а потенциал ДД — оставшиеся параметры C_{nm} и S_{nm}, для которых указанные разности или суммы индексов — числа нечетные.

Кратко очерченная концепция гравитирующих дисков поднимает широкий круг вопросов, ниже остановимся только на одном из них — на введении точечно-дипольных моделей геопотенциала и описании их общей структуры.

Потенциал притяжения планеты предлагаем здесь аппроксимировать суммой потенциалов системы точечных масс и диполей, а не одних точечных масс, как это свойственно многоточечным моделям; в этом **первое отличие** точечно-дипольных моделей от многоточечных.

Далее, точечные объекты модели рекомендуем располагать исключительно лишь в экваториальном сечении планеты, а не рассредоточивать их по ее объему, как это делают в многоточечных моделях; в этом **второе принципиальное отличие** вводимых моделей от чисто точечных.

Заменяя интегралы (3), (4), (5) интегральными суммами, запишем на основании (2) выражение точечно-дипольной аппроксимации потенциала

$$V(P) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{m_i}{l_{Q_i P}} + \sum_{j=1}^{q} \frac{m_j}{l_{Q_j P}} + \sum_{k=1}^{r} \frac{z_P d_k}{l^3_{Q_k P}}\right), \tag{6}$$

в котором

$$m_i = \mu^*(Q_i)\,\Delta S_i^*; \quad m_j = \mu(Q_j)\,\Delta S_j; \quad d_k = \nu(Q_k)\,\Delta S_k, \tag{7}$$

где m_i, m_j — массы «вещества» простых слоев соответственно на их элементарных площадках ΔS_i и ΔS_j, сконцентрированные в их центрах тяжести Q_i и Q_j; d_k — суммарный дипольный момент по площадке ΔS_k, отнесенный к некоторой ее точке Q_k.

Заметим, что для модели (6)

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = M; \quad \sum_{j=1}^{q} m_j = 0; \quad \sum_{k=1}^{r} d_k = 0 \tag{8}$$

(последнее равенство — следствие нахождения центра масс планеты в плоскости ДД, M — масса планеты).

Параметрами точечно-дипольной модели (6) являются $p+q$ точечных масс, r дипольных моментов и $2(p+q+r)$ координат точек $Q_{...}$ экваториального сечения планеты. Если эти параметры известны, то (6) позволяет просто вычислять как потенциал, так и его производные в любой внешней точке P. Использование этой формулы взамен формул, представляющих многоточечную аппроксимацию потенциала, приведет к некоторому усложнению работы — дополнительному вычислению слагаемых третьей («дипольной») суммы, но это окупится уточнением модели, обусловленным именно введением такой суммы, и упрощением процедуры определения параметров модели. А последнее является следствием, с одной стороны, уменьшения (от трех до двух) числа искомых координат каждой точки, несущей точечный объект модели, а с другой — возможностью разбиения системы уравнений для определения параметров модели (6) на три независимых системы, каждая из которых соответствует одному из гравитирующих дисков: ФД, МД, ДД. Подчеркнем, что любая такая система, нелинейная в целом относительно параметров модели, но линейная по «обильностям» точечных объектов (m_i, m_j или d_k), допускает удачное начальное приближение при назначении координатам точек $Q_{...}$ (несущих массы или дипольные моменты), таких значений, которые приписывают узлам кубатурных формул для круга с наивысшей алгебраической степенью точности.

При создании конкретных вариантов точечно-дипольных моделей геопотенциала естественно использование уже накопленного большого опыта построения его многоточечных моделей и уже разработанных эффективных его методик [3, 6] с внесением в них обсужденных здесь корректив.

Список литературы: 1. Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики. — К.: Наук. думка, 1982. 2. Использование искусственных спутников в геодезии. — М.: Мир, 1975. 3. *Марченко А. Н.* Вариационный метод аппроксимации геопотенциала рядом фундаментальных решений уравнения Лапласа. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1985, вып. 41. 4. *Мещеряков Г. А.* О представлении потенциала планеты суммой потенциалов плоских слоев. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1984, вып. 40. 5. *Мещеряков Г. А.* О представлении потенциала планеты суммой потенциалов двух простых слоев. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1984, вып. 39. 6. Proc. Int. Symp. Figure of the Earth, the Moon and other Planets: Monograph Series of VÚGTK. Prague, 1983.

Статья поступила в редколлегию 21. 02. 8