

Находя закономерности в образовании квадратичных и неквадратичных коэффициентов, получаем формулы для оценки точности

$$\frac{1}{P_t} = \frac{s^2}{h^2} \left\{ \frac{1}{6} k(k-1)(2k-1)(1+2\cos^2\gamma) + [(2k-2)^3 - \right.$$

$$- 2k - 4] \cos^2\alpha + \cos^2\alpha \right\} = \frac{s^2}{h^2} \cdot A; \quad (10)$$

$$\frac{1}{P_a} = \frac{\rho''^2}{h^2} [ (1 + 2 \cos^2\gamma + 4 \cos^2\alpha) n - 3 \cos^2\alpha ] = \frac{\rho''^2}{h^2} \cdot B;$$

$$m_t = \mu \frac{s}{h} \sqrt{A}; \quad m_a = \mu \frac{\rho''}{h} \sqrt{B}.$$

(11)

#### Проверка формул на ЭВМ

Номер про- верки	1/P <sub>tt</sub> по формуле		1/P <sub>t</sub> по формуле		1/P <sub>a</sub> по формуле		1/P <sub>tt</sub> · h <sup>2</sup> /ρ'' <sup>2</sup> по ЭВМ		
	1/P <sub>tt</sub>	ЭВМ	Ошибкa, %	1/P <sub>t</sub>	ЭВМ	Ошибкa, %	1/P <sub>a</sub>	ЭВМ	Ошибкa, %
Модель 1 ( $s_t = 1000$ м, $\alpha \approx \beta \approx 26^\circ 40'$ )									
3	1,00	1,00	0	2,18	2,17	0,5	2,20	2,21	0,4
4	2,00	2,00	0	15,00	15,07	0,5	6,80	6,88	1,2
5	3,00	3,00	0	47,61	48,94	2,7	11,40	11,60	1,7
6	4,00	4,00	0	109,22	111,94	2,4	16,01	16,29	1,7
7	5,00	5,00	0	209,05	214,37	2,5	20,61	20,96	1,7
8	6,00	6,00	0	358,71	365,14	1,8	25,21	25,58	1,4
9	7,00	7,00	0	562,85	574,64	2,0	29,81	30,16	1,2
10	8,00	8,00	0	829,87	849,77	2,3	34,41	34,74	0,9
Модель 2 ( $s_t = 1000$ м, $\alpha \approx \beta \approx 45^\circ$ )									
3	1,00	1,00	0	2,49	2,42	3,0	2,50	2,52	0,8
4	2,00	2,00	0	14,94	15,13	1,2	6,50	6,59	1,4
5	3,00	3,00	0	45,34	45,09	1,6	10,50	10,67	1,6
6	4,00	4,00	0	101,65	103,71	2,0	14,50	14,77	1,8
7	5,00	5,00	0	191,86	196,04	2,1	18,50	18,83	1,8
8	6,00	6,00	0	325,44	330,34	1,5	22,50	22,87	1,6
9	7,00	7,00	0	505,88	518,52	2,4	26,50	26,86	1,3
10	8,00	8,00	0	745,63	760,72	2,0	30,50	30,88	1,2

Проверку формул (9), (10), (11) выполняли на аналогичных моделях путем решения системы нормальных уравнений на ЭВМ EC-1030. Результаты приведены в таблице.

Из приведенных результатов видно, что полученные формулы позволяют вычислять  $1/P_{tt}$ ,  $t$ ,  $\alpha$  с погрешностью 3%, где  $B$  — давление, гПа;  $T$  — абсолютная температура воздуха.

Список литературы: 1. Вироев А. М. Высшая геодезия. — М.: Недра, 1970, ч. 1, 2. Дурица А. М. Новые системы построения геодезических сетей. — М.: Геодизиздат, 1952.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЕРТИКАЛЬНОЙ РЕФРАКЦИИ ОТ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ И АБСОЛЮТНЫХ ВЫСОТ В ГОРНЫХ УСЛОВИЯХ

Зависимость коэффициентов вертикальной рефракции от эквивалентных высот в равнинных и всхолмленных районах хорошо исследована [2].

Несколько иначе обстоит дело с изучением этого вопроса в горных районах. На основании [1], [4] можно утверждать, что коэффициент рефракции уменьшается с увеличением абсолютных высот луча над уровнем моря. Однако кроме фактора абсолютной высоты на коэффициент рефракции действует эквивалентная высота. Поэтому в горных условиях актуален вопрос о взаимодействии двух факторов: эквивалентной и абсолютной высот

луча. Днем при малых эквивалентных высотах луч имеет место небольшие положительные или даже отрицательные рефракции, обусловленные сверхадиабатическими градиентами температуры. С ростом высоты луча над подстилающей поверхностью вертикальные градиенты температуры уменьшаются. Следовательно, должно наблюдаться увеличение коэффициентов рефракции. Далее при значительных эквивалентных высотах вертикальные градиенты температуры стабилизируются, приближаются к 0,65 К на 100 м. Такие градиенты характерны для свободной атмосферы. Зависимость коэффициентов рефракции от эквивалентной высоты постепенно ослабляется.

При дальнейшем поднятии луч попадает в более однородные логарифмические слои, кривизна его уменьшается, радиус растет, в связи с этим коэффициент рефракции должен уменьшаться. Таким образом, априорные предположения, требующие подтверждения и уточнения.

Цель статьи — на основании теоретических предпосылок и экспериментальных данных установить закономерность изменения коэффициентов рефракции при изменении эквивалентных высот от 10...20 до нескольких сотен метров; взаимодействие в условиях горного района двух факторов: эквивалентной и абсолютной высот.

Рассмотрим вначале теоретические предпосылки. Как известно, пренебрегая действием влажности, показатель преломления воздуха  $n$  для оптического излучения белого цвета можно представить формулой

$$n - 1 = 78,85 \frac{B}{T} \cdot 10^{-6}, \quad (1)$$

Для определения показателя изменения преломления с высотой в зависимости от изменения метеоэлементов пролифферируем (1) по высоте  $h$ :

$$\frac{dn}{dh} = \frac{78,85}{T} \frac{dB}{dh} 10^{-6} - \frac{78,85 \cdot B}{T^2} \cdot \frac{dT}{dh} \cdot 10^{-6}. \quad (2)$$

В данных расчетах удобнее пользоваться не показателем преломления  $n$ , а индексом показателя преломления  $N$ . Так как

$$N = (n-1) \cdot 10^{-6}, \quad (3)$$

то (2) с учетом (3) принимает вид

$$\frac{dN}{dh} = \frac{78,85}{T} \frac{dB}{dh} - \frac{78,85}{T^2} \frac{dT}{dh}. \quad (4)$$

Для определения вертикального градиента давления воспользуемся уравнением статики атмосферы для сухого воздуха

$$\frac{dB}{dh} = -g \frac{B}{RT}. \quad (5)$$

После подстановки значения газовой постоянной  $R$  и силы тяжести  $g$  получим

$$\frac{dT}{dh} = -0,0342 \frac{B}{T}. \quad (6)$$

Днем, когда обычно и ведется тригонометрическое нивелирование, наблюдается неустойчивая стратификация воздуха по вертикали, для которой характерны сверхдиабатические вертикальные градиенты температуры

$$\frac{dT}{dh} = ch^{-4/3}, \quad (7)$$

где  $c$  — аномальный градиент температуры на высоте 1 м.

Запишем (4) с учетом градиентов давления и температуры

$$\frac{dN}{dh} = -2,6967 \frac{B}{T^2} - \frac{78,85 B}{T^2} ch^{-4/3}. \quad (8)$$

В свою очередь, градиенты индекса показателя радиуса световой кривой  $R_e$  и коэффициенты рефракции находятся в соотношении [3]

$$\frac{1}{R_e} = -\frac{dN}{dh} \cdot 10^{-6} = -\frac{K}{R_s}. \quad (9)$$

На основании (9) находим коэффициент рефракции

$$K = -R_s \frac{dN}{dh} \cdot 10^{-6}. \quad (10)$$

Учитывая  $\frac{dN}{dh}$ , выводим для коэффициента рефракции формулу, дающую представление о раздельном вкладе в значение коэффициента рефракции вертикальных градиентов давления и температуры:

$$K = 17,1788 \frac{B}{T^2} + 502,3534 \frac{B}{T^2} ch^{-4/3}. \quad (11)$$

Предположив, что  $B = 1000$  гПа,  $T = 300$  К,  $c = -1$  К на 1 мм при различных эквивалентных высотах  $h$ , получим на основании (11) теоретические коэффициенты рефракции. Изменение соотношения  $B/T^2$  с высотой не принималось во внимание (см. табл.).

При вычислении теоретических коэффициентов для эквивалентных высот 400, 500 м допускалось наличие постоянных вертикальных градиентов температуры, характерных для свободной атмосферы и равных 0,0065 К на 1 м. В этом случае (11) принимает вид

$$K = 13,9135 \frac{B}{T^2}. \quad (12)$$

Следовательно, значения  $K$  для 400 и 500 м, приведенные в таблице, вычислены по (12). В соответствии с допущениями коэффициенты  $K$  при  $h > 300$  м равны 0,155.

Фактическое изменение коэффициентов рефракции с изменением эквивалентных высот исследовано на основании экспериментальных наблюдений в горном районе Крыма. Экспериментальная тригонометрическая сеть содержит 19 пунктов и 41 сторону со средней длиной 8,2 км. По каждой стороне вели взаимные одновременные измерения зенитных расстояний четырьмя приемами теодолитом ОТ-02М. Предполагали равенство взаимных одновременных коэффициентов рефракции, полученные коэффициенты относили к средней эквивалентной высоте, т. е. допускали, что для некоторой линии 1—2 средняя эквивалентная высота  $h$  будет

$$h_s = \frac{1}{2} (h_{s1-s2} + h_{s2-s1}). \quad (13)$$

Средние эквивалентные высоты изменялись от 12 до 550 м, а абсолютные — от 177 до 1537 м.

При математической обработке результатов измерений зависимость  $K$  от  $h$  представлена трехчленом такого вида

$$K = K_0 + \alpha h + \beta h^2. \quad (14)$$

Значения  $K_0$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  найдены по способу наименьших квадратов. Запишем (14) с численными значениями параметров и оценкой их точности

$$K = 0.018 \pm 0.0323 \pm 0.0059 \pm 0.105 + 0.058 h - 0.009 h^2. \quad (15)$$

При обработке измерений эквивалентные высоты выражали в сотнях метров, что необходимо иметь в виду, используя (15). К сожалению, точность определения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  низкая. Средние квадратические погрешности составляют примерно половину самих величин. Тем не менее полученные данные выведены из обработки всего материала без какой-либо отбраковки и вполне удовлетворительно согласуются с теоретическими расчетами.

Значения коэффициентов рефракции ( $K_s$ ), вычисленные по (15), не различаются более чем на  $0.03 \dots 0.04$ . Учитывая допущения, сделанные в теоретических расчетах, а также сравнимую низкую точность определения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ , вряд ли можно было ожидать лучшего совпадения теоретических и экспериментальных коэффициентов рефракции.

Сравнивая результаты, замечаем, что и теоретические и экспериментальные данные указывают на рост коэффициентов рефракции до эквивалентных высот 300 м. При  $h \geq 300$  м начинается уменьшение коэффициентов рефракции, что можно объяснить ростом абсолютных высот. Заметим, что при эквивалентных высотах более 50 м последний член формулы (15) фактически отражает влияние абсолютных высот, так как  $h^2 \approx H$ . Действительно, учитывая, что в (15)  $h$  выражено в сотнях метров, и начиная с  $h = 100$  м и до  $h = 500$  м имеем абсолютные высоты соответственно 100, 400, 900, 1600 и 2500 м.

Как показала обработка имеющихся данных по Карпатам, в этом горном районе наблюдаются аналогичные закономерности.

**Список литературы:** 1. Ващенко В. И., Джуман Б. М., Острогский А. Л. Исследование зависимости коэффициента рефракции от абсолютной высоты. — Геодезия и картография, 1974, № 10. 2. Иштогов А. А., Пелицен Л. П. Тр. ЦНИИГАК, 1955, вып. 102, 3. Острогский А. Л. Методы учета атмосферных влияний на геодезические измерения, основанные на решении обратных задач рефракции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1983, вып. 37. 4. Садовский И. И. О зависимости коэффициента рефракции от абсолютной высоты земной поверхности. — Геодезия и картография, 1966, № 11.

Статья поступила в редакцию 20.04.84

УДК 917.946

Г. А. ПАВЛОВ

## ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Для исследования общей планетарной фигуры Земли (геоида) широко используются такие численные характеристики планеты, как распределение плотности недр Земли, ее стоковые постоянные геопотенциала. Определение физической поверхности Земли по ним тесно переплетается с основной проблемой физической геодезии [3], в которой постулирована необходимость совместного изучения фигуры Земли и внешнего гравитационного поля, создаваемого различными пластами или блоками поверхности и тел Земли. Проблема определения поверхности Земли приводит, как известно, к следующей математической задаче.

Пусть вне некоторого тела задана гармоническая функция, стремящаяся к нулю на бесконечности. Требуется найти такое тело с известной или неизвестной плотностью, для которого внешний потенциал был бы равен исходной функции. В работах по обратным задачам теории потенциала [1, 2, 4, 6, 7] рассмотрены различные варианты данной задачи: так, вместо представления гармонической функции в виде потенциала объемных масс тела исследовалось представление в виде потенциала слоя, двойного слоя, объемных масс. Отметим, что в поставленном довольно общем виде, как показывают многочисленные примеры [2], задача не имеет решения.

Исходя из этого, рассматриваются различные модификации приведенной выше постановки задачи, одной из которых является так называемая задача «в малом», восходящая к стоксу, где предполагается, что заданная функция мало отличается от некоторого известного потенциала априори заданного заранее тела. В такой постановке при выполнении не слишком обременительных условий задача имеет единственное решение.

Рассмотрим вопрос существования решения «в малом» обратной задачи для суммарного потенциала (просто слоя, двойного слоя, а также объемного) в случае, когда они сосредоточены по разным телам; попутно изучим единственность решения. Пусть

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}; \mu, \nu, \Theta, T_1, T_2, T_3) = \int_{T_1} \frac{\mu(x) dx}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \int_{T_2} \frac{\nu(y) d\Gamma(y)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \int_{T_3} \frac{\Theta(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\Gamma(y)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (1)$$

где  $\partial T_2$  — граница множества  $T_2$ ;  $\bar{T}$  — замыкание  $T$ ;  $n$  — внешняя нормаль к  $T_3$ . При этом  $T_1$  не обязательно односвязна область. Как и в [2, 6], считаем, что  $T_1, T_2, T_3 \in C_{2,\lambda}^1$ . Зададим область  $T \equiv C_{2,\lambda}^1$ ,  $T \supseteq T_1 \cup T_2 \cup T_3$ . Для областей  $T_1, T_2, T_3$  определим некоторые отображения границ  $\partial T_1, \partial T_2, \partial T_3 = x_{(k, \tilde{k})} = x + \xi_k(x) n_k(x)$ .