

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Для исследования общей планетарной фигуры Земли (геоида) широко используются такие численные характеристики планеты, как распределенные плотности недр Земли, ее стоксовые постоянные геопотенциала. Определение физической поверхности Земли по ним тесно переплетается с основной проблемой физической геодезии [3], в которой постулирована необходимость совместного изучения фигуры Земли и внешнего гравитационного поля, создаваемого различными пластами или блоками поверхностей и тел Земли. Проблема определения поверхности Земли приводит, как известно, к следующей математической задаче.

Пусть вне некоторого тела задана гармоническая функция, стремящаяся к нулю на бесконечности. Требуется найти такое тело с известной или неизвестной плотностью, для которого внешний потенциал был бы равен исходной функции. В работах по обратным задачам теории потенциала [1, 2, 4, 6, 7] рассмотрены различные варианты данной задачи: так, вместо представления гармонической функции в виде потенциала объемных масс тела изучалось представление в виде потенциала слоя, двойного слоя, объемных масс. Отметим, что в поставленном довольно общем виде, как показывают многочисленные примеры [2], задача не имеет решения.

Исходя из этого, рассматриваются различные модификации приведенной выше постановки задачи, одной из которых является так называемая задача «в малом», восходящая к стоксу, где предполагается, что заданная функция мало отличается от некоторого известного потенциала априори заданного заранее тела. В такой постановке при выполнении не слишком обременительных условий задача имеет единственное решение.

Рассмотрим вопрос существования решения «в малом» обратной задачи для суммарного потенциала (просто слоя, двойного слоя, а также объемного) в случае, когда они сосредоточены по разным телам; попутно изучим единственность решения. Пусть этот потенциал

$$W(x; \mu, \nu, \Theta, T_1, T_2, T_3) = \int_{T_1} \frac{\mu(w) dy}{|x-y|} + \int_{\partial T_2} \frac{\nu(y) d\Gamma(y)}{|x-y|} + \\ + \int_{\partial T_3} \Theta(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} d\Gamma(y), \quad x \notin T_1 \cup T_2 \cap T_3, \quad (1)$$

где ∂T_2 — граница множества T_2 ; \bar{T} — замыкание T ; n — внешняя нормаль к T_3 . При этом T_1 не обязательно односвязная область. Как и в [2, 6], считаем, что $T_1, T_2, T_3 \in C^{2,\lambda}$. Зададим область T , где $T \in C^{1,\lambda}$, $T \supset T_1 \cup T_2 \cup T_3$. Для областей T_1, T_2, T_3 определим некоторые отображения границ $\partial T_1, \partial T_2, \partial T_3$ — $x^{(k, \xi)} = x + \xi_k(x) n_k(x)$,

$k=1, 2, 3$, где n_k — нормали к ∂T_k ; $x \in \partial T_k$; ξ_k — функция, определенная на ∂T_k ; $\|\xi_k\| = |\xi_k|$; ${}^{1,\lambda}(\partial T_k) < \delta_0$ [2]. Пусть $T_{h,\xi}$ — области, границы которых $\partial T_{h,\xi}$ получены из ∂T_h отображением $x \rightarrow x^{(R, \xi)}$. Вне T зададим гармоническую функцию $u(x)$, $u(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, для которой

$$\max_{x \in \partial T} |u(x) - W(x; \mu, \nu, \theta, T_1, T_2, T_3)| < \delta_1 \quad (2)$$

и $u(x)$ аналитически продолжается в некоторую окрестность $\partial T_1 \cup \partial T_2 \cup \partial T_3$, функции μ, ν, θ считаются определенными в \bar{T} , $\mu, \nu, \theta \in C^{5,\lambda}(\bar{T})$ (см. рисунок) [2, 6]. Допустим, что $T_0, T_0 \subset \bar{T}_1 \cup \bar{T}_2 \cup \bar{T}_3$ та область, вне которой гармоническая функция удовлетворяет оценке

$$\max_{x \in T_0} |u(x)| < c_1. \quad (3)$$

Кроме того,

$$|\mu|^{5,\lambda}(\bar{T}) + |\nu|^{5,\lambda}(\bar{T}) + |\theta|^{5,\lambda}(\bar{T}) < c_2. \quad (4)$$

В нашем случае формулировка обратной задачи теории потенциала «в малом» имеет следующий вид [2, 6]*. Если для тел T, T_0, T_1, T_2, T_3 и чисел c_1, c_2 при любых гармонических функциях u и плотностях μ, ν, θ , удовлетворяющих условиям (2) — (4), найдутся числа δ_1, δ_2 , то тогда существуют области $T_{1,\xi}, T_{2,\xi}, T_{3,\xi}$ такие, что

$$u(x) = W(x; \mu, \nu, \theta, T_{1,\xi}, T_{2,\xi}, T_{3,\xi}), \quad x \in \bar{T}. \quad (5)$$

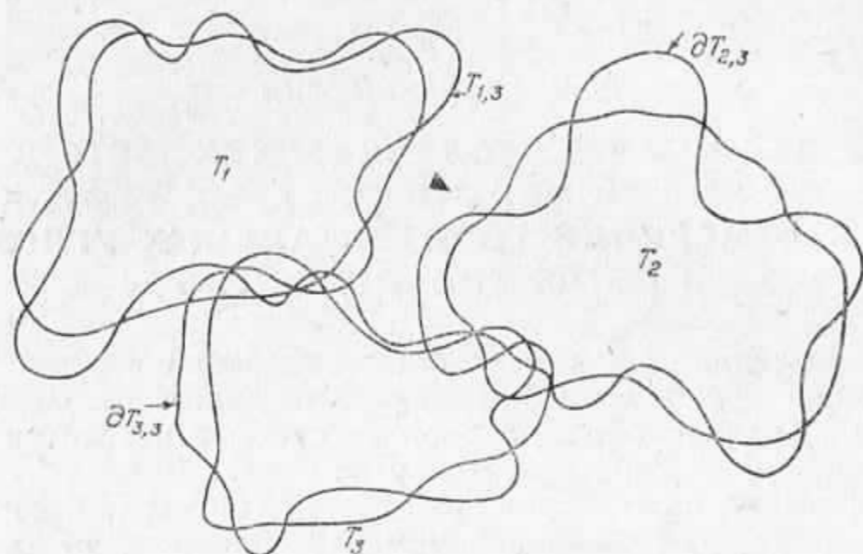
Исследуем вопросы единственности и существования решения поставленной проблемы. В такой постановке задача не имеет, вообще говоря, решения**. Приведем необходимые и достаточные условия существования решения задачи в зависимости от расположения тел T_1, T_2, T_3 . Так, если T_1 односвязная область (в дальнейшем мы будем это предполагать) $\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 = \emptyset, \bar{T}_1 \cap \bar{T}_3 = \emptyset, \bar{T}_2 \cap \bar{T}_3 = \emptyset$, то для того, чтобы существовало решение, заданная функция u должна иметь вид $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x)$, где $u_k, k=1, 2, 3$ аналитически продолжаются через ∂T_k . Если мы ищем решение задачи «в малом», то $u_k, k=1, 2, 3$ должны быть близкими к соответствующим потенциалам областей T_k . Укажем, что не всякая гармоническая функция u , близкая к $W(x; \mu, \nu, \theta, T_1, T_2, T_3)$, имеет такое представление и этим ограничивается класс допустимых функций u . Проблема представления функции u в виде суммы трех функций тесно переплетается с так называемыми потенциалографическими задачами [5], в которых рассматриваются задачи представления внешнего потенциала в виде суммы потенциалов некоторой поверхности, несущей рассматриваемые слои или один из них.

* Обратные задачи теории потенциала в такой общей постановке ранее не рассматривались. В [6] рассмотрены частные постановки проблемы.

** В опубликованных работах, за исключением [6], изучался только случай $T_1 = T_2 = T_3$, и задача имела только единственное решение.

В случае, когда для функции u будет справедливо представление в данном виде, решение задачи существует и единственное. Заметим, что такое представление будет иметь место, если

$$u(x) = \int_{\partial T_2} \frac{v(y) d\Gamma(y)}{|x-y|} - \int_{\partial T_3} \Theta(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} d\Gamma(y) \quad (6)$$



Области задания потенциалов.

аналитически продолжается через ∂T_1 . Аналогично рассматривается случай $\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \neq \emptyset$, $\bar{T}_1 \cap \bar{T}_3 = \emptyset$, $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_3 = \emptyset$ и подобные ему. Случай $\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \neq \emptyset$, $\bar{T}_1 \cap \bar{T}_3 \neq \emptyset$, $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_3 \neq \emptyset$ [6] рассматривается по аналогии. Отметим только, что условия типа (6) можно выполнять не только для тел T_2 , T_3 . Выражение

$$u(x) = \int_{T_1} \frac{\mu(y) dy}{|x-y|} - \int_{\partial T_3} \Theta(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} d\Gamma(y) \quad (7)$$

также может аналитически продолжаться через ∂T_2 , следовательно, решение задачи в этом случае может иметь единственное решение. Аналогично предыдущему рассматриваются случаи, когда T_1 , T_2 , T_3 не являются областями.

Список литературы: 1. Пванов В. К. Обратная задача для тела, близкого к данному. — Изв. АН СССР, 1956, т. 20, № 6. 2. Исаков В. М. О существовании решений обратных задач теории потенциала. — ДАН СССР, 1978, т. 240, № 4. 3. Мещеряков Г. А. Об определении физической поверхности Земли с использованием параметров геопотенциала, определяемых методами космической геодезии. — В кн.: Использование наблюдений ИСЗ для геодезии и геофизики: Тез. докл. Междунар. конф. «Интеркосмос». Суздаль, 1982. 4. Мещеряков Г. А. Об одной обратной задаче теории потенциала. — Вестн. Львов. политехн. ин-та, 1983, № 172. 5. Мещеряков Г. А. Обратные задачи теории геопотенциала: Меж-

дународная зимняя школа «Теоретические и экспериментальные вопросы планетарной геодинамики». — К., 1983 (Препринт / Ин-т теоретической физики АН УССР). 6. Павлов Г. А. Разрешимость обратных задач теории потенциала. — Дифференциальные уравнения, 1982, т. 18, № 10. 7. Прилепко А. С. О разрешимости обратной задачи объемного потенциала переменной плотности. — Сиб. мат. журн., 1970, т. 11, № 6.

Статья поступила в редколлегию 14.03.84