

ментов времени кратных 0,5 ч [1]. Для примера на рис. 2 представлены полученные реализации всех величин на п. I. При этом для наглядности R_{12} и ΔZ даны в секундах, а R , Y и C — в угловых единицах.

На рис. 2 видно, что периоды наступления спокойных изобразжений и периоды минимальных значений ΔZ хорошо согласуются между собой, хорошо согласуются по времени и нулевые значения

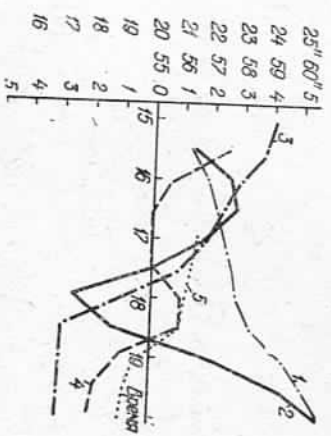


Рис. 2. Дневной ход угловых и метеорологических величин на п. I. 1 — горизонтальный угол; 2 — разность зенитных расстояний между вторым и первым наблюдениями; 3 — колесная изобразимость; 4 — вертикальный радиус; 5 — радиационный баланс.

R и Y . Однако время наступления спокойных изобразжений, ΔZ и R , Y имеет заметные различия. Подобные различия имели место и на других пунктах.

По реализации углов в каждом сечении найдены невязки треугольников, а по ним вычислены средние квадратические ошибки измерений углов. Их результаты приведены в табл. 1.

По данным табл. 1 четко прослеживается дневной ход угловых невязок и явно выражается дневной ход средних квадратических ошибок. Минимальные невязки треугольников имеют место в периоды нулевых значений метеозамен- тов. Больше по значению невязки, как и предполагалось ранее, имеют место в треугольниках, образованных сторонами I—II и II—III.

Таблица 1
Дневной ход невязок треугольников

Время, ч—мин	I		II		III		μ
	II	IV	III	IV	II	III	
15—30	+5,0"	-1,1"	+1,5"	+7,6"	+2,66"		
16—00	+4,7"	-0,9"	-0,3"	+5,3"	+2,06"		
17—00	+3,9"	-0,7"	+0,1"	+3,7"	+1,58"		
18—00	+2,8"	+0,3"	+0,1"	+2,6"	+1,11"		
19—00	+2,6"	+1,9"	+1,2"	+2,1"	+1,16"		
18—30	+3,8"	+3,1"	+1,2"	+2,5"	+1,68"		
19—00	+2,8"	+2,2"	+2,4"	+2,9"	+1,50"		
19—30	+3,7"	+0,3"	+1,7"	+5,0"	+1,86"		
	+7,5"	-0,6"	+0,5"	+8,6"	+3,30"		

Таблица 2
Невязки треугольников в зависимости от метода определения наилучшего периода видности

Треугольники	С				AZ				T				R			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
I	+2,84"	+3,06"	+5,08"	+4,70"												
II	+3,22	+2,82	+2,80	+2,76												
III					+2,14	+2,14	+1,70	+1,70								
IV					+1,14	+1,00	-0,80	-0,44								
μ	+1,42	+1,38	+1,76	+1,65												

Для сравнения различных способов определения моментов минимальных рефракционных влияний по минимальному значению C , ΔZ , R и Y на каждом пункте выбраны пять значений углов, вычислены средние значения, а по ним найдены невязки треугольников и произведена оценка точности угловых измерений. Результаты этих вычислений приведены в табл. 2.

Анализ данных таблицы показывает, что в треугольниках, расположенных над однородной поверхностью (треугольники II—III—IV, III—I—IV) независимо от способа определения моментов изотермии, невязки почти одинаковы. В облачную и пасмурную погоду невязки треугольников значительно меньше, чем в солнечную погоду. Как и следовало ожидать, колебания изобразжений и минимальные разности измеренных зенитных расстояний более надежно определяют время наступления минимальных искажений углов действием боковой рефракции.

Список литературы: 1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1969. 2. Изотов А. А., Пеллинен Л. П. Исследование земной рефракции и методов геодезического нивелирования. — Тр. ЦНИИГАиК, 1955, вып. 102. 3. Островский А. Д. О суточном ходе угловых невязок треугольников, вызванном боковой рефракцией. — Науч. зап. ЛПИ. Сер. геодезическая, 1962, вып. 82. 4. Островский А. Д. К вопросу программы угловых измерений при свето- и радиодальномерной полигонометрии. — Инженерная геодезия, 1964, № 1. 5. Островский А. Д., Тартаковский Р. М. Опыт применения программы угловых измерений симметричной программы наблюдения горизонтальных углов. — Геодезия, картография и аэрофотогеодезия, 1967, вып. 6. 8. Островский А. Д., Тартаковский Р. М. Исследование боковой рефракции в Заполярье. — Геодезия, картография и аэрофотогеодезия, 1969, вып. 10. 9. Тартаковский Р. М. Зависимость изменения боковой рефракции от радиационного баланса в горной местности. — Геодезия, картография и аэрофотогеодезия, 1973, вып. 18. 10. Халка Д. С. Исследование влияния рефракционных полей, образующихся над залесяной равнинной местностью, на точность измерения углов в триангуляции. — В кн.: Науч. работы аспирантов ЛПИ, 1963, № 2. 11. Яковлев Н. В. К теории и практике учета суточного хода рефракции при угловых измерениях и аэриальных измерениях в геодезических сетях. — Геодезия и картография, 1969, № 8.

Статья поступила в редакцию 02. 04. 84

К. Р. ТРЕТЬЯК

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СХЕМ ИЗМЕРЕНИЙ В СЕТЯХ ТРИДАТЕРАЦИИ

Задача построения схем измерений в общей проблеме оптимального проектирования геодезических сетей решается в два этапа: проектированием схем необходимых измерений и выбором [4, 7].

При последовательном наборе необходимых измерений по критерию максимальной информативности может возникнуть неопределенность очередного выбора из ряда измерений одинаковой информативности. Следовательно, оптимальное построение схем измерений не имеет однозначного решения, что, в свою очередь, ведет к неоднозначности составления окончательной схемы необходимых и избыточных измерений.

Задача оптимального проектирования схемы измерений состоит в нахождении такой схемы для сети с жестко закрепленными пунктами и заданной средней квадратической ошибкой измерений, которая удовлетворяет заданным условиям точности:

$$f_i^T K f_i \geq a_i, \quad (1)$$

где f_i — весовые функции; K — ковариационная матрица; a_i — заданные точные характеристики, — и соответствует минимальной стоимости. В сетях трилатерации под минимальной стоимостью будем подразумевать минимум измеряемых линий.

Предлагаем алгоритм, позволяющий избежать двухэтапного проектирования и составления схемы необходимых измерений. Суть алгоритма состоит в последовательном исключении измерений из группы всех допустимых по критерию минимизации расхождения определенной функции ковариационной матрицы.

Первый шаг состоит в вычислении ковариационной матрицы всех допустимых измерений

$$K_g = \mu (A^T P A)^{-1}, \quad (2)$$

где μ — ошибка единицы веса (приравнивается к средней квадратической ошибке измерений); A — матрица уравнений погрешностей всех допустимых измерений; P — весовая матрица. При невыполнении неравенства

$$f_i^T K_g f_i \leq a_i, \quad (3)$$

поставленная задача в предлагаемых условиях не решается.

При выполнении условий (3) вычисляется теоретически оптимальная ковариационная матрица $K_{r.o.}$, которая удовлетворяет требованиям:

$$F(K_{r.o.}) = \text{тах}; \quad (4) \quad f_i^T K_{r.o.} f_i \geq a_i; \quad (5) \quad \lambda_j(K_{r.o.}) > 0, \quad (6)$$

где F — функциональный критерий оптимизации; $\lambda_j(K_{r.o.})$ — собственные значения $K_{r.o.}$.

Критерий F для соответствующих классов оптимизации принимают следующие значения:

A — оптимизация $S_p(K_{r.o.})$ — след матрицы;

D — оптимизация $\det(K_{r.o.})$ — детерминант матрицы; E — оптимизация $\lambda_{\text{max}}(K_{r.o.})$ — максимальное собственное число матрицы; I — оптимизация $\lambda_{\text{min}}(K_{r.o.})/\lambda_{\text{max}}(K_{r.o.})$ — отношение минимального к максимальному собственным чисел матрицы.

Условие (5) соответствует положительной определенности ковариационной матрицы. Нахождение $K_{r.o.}$ представляется задачей нели-

нейного программирования, решение которой производится методом сопряженных градиентов (метод Флетчера—Ривса) [9]. Он позволяет найти минимум нелинейной целевой функции многих переменных вида

$$M = F(x_1, x_2, \dots, x_L) \quad (7)$$

при отсутствии ограничений. Переменными в (7) будут элементы $K_{r.o.}$. Так как $K_{r.o.}$ симметрична, то количество переменных $L = n(n+1)/2$, где n — удвоенное число пунктов.

Условия (5) и (6) учитываются в общей целевой функции с помощью штрафных функций. Общая целевая функция имеет вид

$$1/F(K_{r.o.}) + \sum_{i=1}^n c_1 b_i |f_i^T K_{r.o.} f_i - a_i| + \sum_{j=1}^n c_2 b_j |\lambda_j(K_{r.o.})| = \min, \quad (8)$$

где c_1, c_2 — постоянные коэффициенты; $b_i = 0$ при выполнении соответствующих условий (5) и (6); $b_i = 1$ при их нарушении.

Используемые штрафные функции в общем подобны функциям, приложенным в [8]. Общая целевая функция имеет унимодальный вид, что позволяет методом сопряженного градиента найти глобальный экстремум.

По методу Флетчера—Ривса сначала выбирают начальную точку в пространстве проектирования, координатами которой являются значения соответствующих элементов матрицы K_g , так как при выполнении условия (3) n -мерный эллипсоид матрицы K_g принадлежит пространству, ограниченному n -мерным эллипсоидом $K_{r.o.}$. Затем вычисляют компоненты вектора градиента

$$g_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{-(dF/dK_{ij})}{\left[\sum_{\xi=1}^n \sum_{\eta=1}^n (dF/dK_{\xi\eta})^2 \right]^{1/2}} \quad \begin{matrix} i=1, n \\ j=1, n \\ \xi=1, n \\ \eta=1, n \end{matrix} \quad (9)$$

и определяют направление наискорейшего спуска, а в направлении наискорейшего спуска ведут одномерный поиск по формуле

$$K_{i, \text{нов}} = K_{i, \text{ст}} + S g_{ij} \quad i \leq j, \quad (10)$$

где S — смещение в направлении вектора градиента. Найдя минимум в этом направлении, определяют направление новых единичных векторов.

По новому направлению проводят одновременный поиск и, найдя минимум, проверяют достигнута ли требуемая степень сходимости. Если да, то вычисления прекращаются и найденная матрица будет $K_{r.o.}$ в противном случае процесс повторяется.

Для реализации на ЭВМ вычисления $K_{r.o.}$ применяем программу ФМСГ из пакета прикладных программ ЕС ЭВМ.

Целевая функция (8) формируется в подпрограмме FUNST, входящей в программу ФМСГ.

Вместо определения частных производных вычисляем значение градиента

$$G_{ij} = \frac{F(K_{ij} + \Delta K) - F(K_{ij} - \Delta K)}{2\Delta K}, \quad (11)$$

где ΔK — малые конечные приращения проектных параметров (принято $\Delta K = 10^{-5}$).

В случае попадания проектной точки на линию излома уровнях линий дальнейший поиск минимума, по всем направлениям, кроме линии излома, теряет смысл. Для этого при выполнении

$$F(K_{ij} + \Delta K) > F(K_{ij}) \quad (12)$$

$$F(K_{ij} - \Delta K) > F(K_{ij}) \quad (13)$$

поиск по соответствующим направлениям не ведется, и $G_{ij} = 0$. Учет условий (12) и (13) значительно ускоряет процесс поиска оптимального решения по программе ФМСГ.

Принимая во внимание ошибки исходных данных и то, что $m_{исхд} \ll \mu$, поиск по элементам K_{ij} , соответствующим ошибкам исходных данных, приводит к нецелесообразно. Такой поиск будет вести к увеличению $m_{исхд}$. В этом случае градиенты соответствующих элементов необходимо приравнять к нулю.

Подпрограмма ФМСГ требует введения приближенного значения оптимального решения. Удачный выбор этого значения и постоянных c_1 и c_2 (8) может значительно уменьшить время нахождения оптимальных параметров. В наших исследованиях значения c_1 и c_2 выбраны так, чтобы первый член (8) был на порядок меньше двух остальных. При уменьшении c_1 и c_2 возможен выход поиска за пределы проектного пространства, а с их увеличением уменьшается скорость нахождения оптимума.

Заключительная часть алгоритма — нахождение оптимальной схемы измерений путем последовательного исключения малоэффективных из группы допустимых измерений при условии выполнения требований:

$$F(K_i) - F(K_{i-1}) = \min; \quad (14)$$

$$\lambda_j(K_{i-1} - K_i) \geq 0 \quad j=1, n, \quad (15)$$

где K_i, K_{i-1} — ковариационная матрица до и после исключения очередного определения.

Выполнение (15) обеспечивает принадлежность n -мерного эллипсоида погрешностей K_i пространству, ограниченному n -мерным условием (1). Замена (1) условием (14) целесообразна только в случае большого количества разнообразных весовых функций. В противном случае вычисление K_{i-1} экономически неэффективно.

Уравнение (14) на каждом этапе отбора решают перебором всех линий из группы допустимых измерений. Линию, удовлетворяющую условию (14), из группы возможных изменений удаляют. Новую корреляционную матрицу вычисляют по рекуррентной формуле, предложенной в [7].

Если при отборе линий обнаружено невыполнение условия (15), то эти линии тоже исключают из группы возможных измерений. Их переводят в группу необходимых для получения оптимальной модели. Процесс продолжается до исчерпания группы возможных измерений.

Практическое использование алгоритма покажем на модельной сети (рис. 1).

Пример. Для сети из восьми жестко закрепленных пунктов требуется составить оптимальные схемы линейных измерений по А, D, E, I, G (max A = min), G (max $m_a = \min$), G (max $m_a/s_1 = \min$) по критериям оптимизации, где А — длина l подлесь максимальной эллипса погрешностей; m_a — максимальная погрешность направления; m_s — максимальная погрешность длины линии. Измерения в сети равноточны. Средняя квадратическая погрешность измерения расстояния $m_s = 0,5$ см. Допустимые точностные параметры сети: А = 1,3 см, $m_a = 10''$, $m_s = 1/20\ 000$. В таблице представлены результаты построения оптимальных схем по заданным критериям оптимизации.

Характеристики оптимальных моделей

Оптимальная модель	Количество необходимых линий	Название необходимых линий	Максимальные точностные параметры		
			А, см	m_a''	m_s/s
A	14	3-4, 4-5, 1-7, 1-5, 2-3, 4-6, 6-7, 2-4, 2-5, 2-8, 1-6, 1-8, 2-6, 7-8	1,23	8,3	1/27 000
D	14	1-5, 1-8, 2-5, 2-8, 6-7, 3-4, 1-7, 2-4, 4-5, 4-8, 5-6, 6-8, 7-8, 2-3	1,29	9,1	1/39 000
E	16	1-5, 3-4, 4-4, 5-6, 7-1, 3-1, 6-1, 7-2, 2-3, 2-8, 3-6, 4-8, 7-8, 2-5, 1-8, 2-4, 2-6, 3-4, 4-5, 4-7, 5-6, 1-4, 1-7, 1-8, 2-5, 2-3, 1-6, 2-6, 2-8, 3-8, 1-5	1,23	7,9	1/20 000
I	14	4-5, 5-6, 3-5, 5-7, 2-3, 1-7, 2-5, 2-8, 1-4, 1-5, 1-6, 2-4, 2-6, 7-8	1,14	8,5	1/28 000
G (max A = min)	14	3-4, 6-7, 3-5, 5-7, 1-5, 1-7, 1-8, 2-3, 1-4, 2-4, 2-5, 2-8, 3-6, 3-8, 1-6	1,20	7,6	1/22 000
G (max $m_a = \min$)	15	1-5, 2-5, 1-8, 2-4, 2-8, 6-7, 6-8, 7-8, 3-4, 4-5, 4-8, 1-7, 5-6, 1-3	1,29	9,1	1/41 000

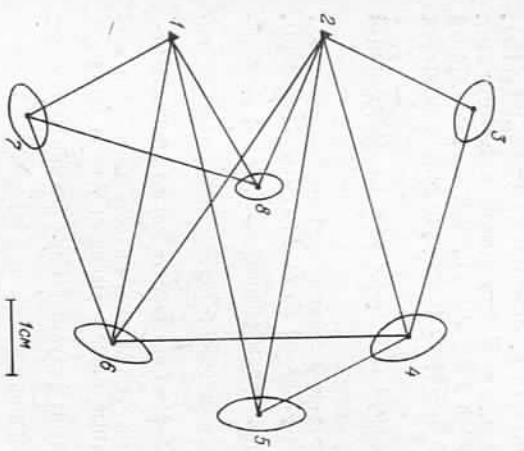


Рис. 1. А-оптимальная схема сети трилатерации. Масштаб эллипсов погрешностей 1 : 2. Масштаб сети 1 : 5000.

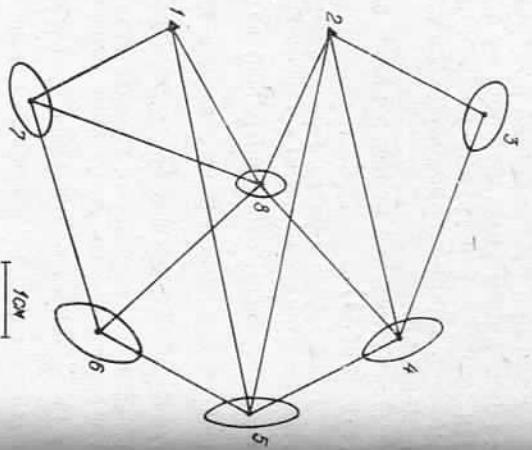


Рис. 2. Д-оптимальная схема сети трилатерации. Масштаб эллипсов погрешностей 1 : 2. Масштаб сети 1 : 5000.

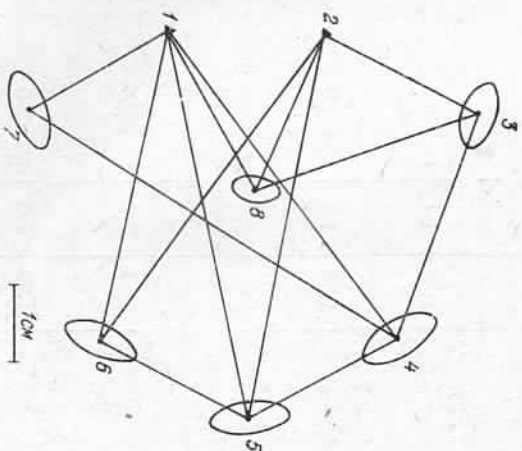


Рис. 3. I-оптимальная схема сети трилатерации. Масштаб эллипсов погрешностей 1 : 2. Масштаб сети 1 : 5000.

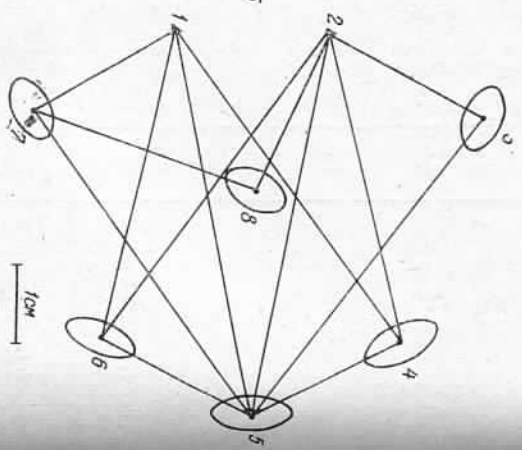


Рис. 4. G (max A = min) -оптимальная схема сети трилатерации. Масштаб эллипсов погрешностей 1 : 2. Масштаб сети 1 : 5000.

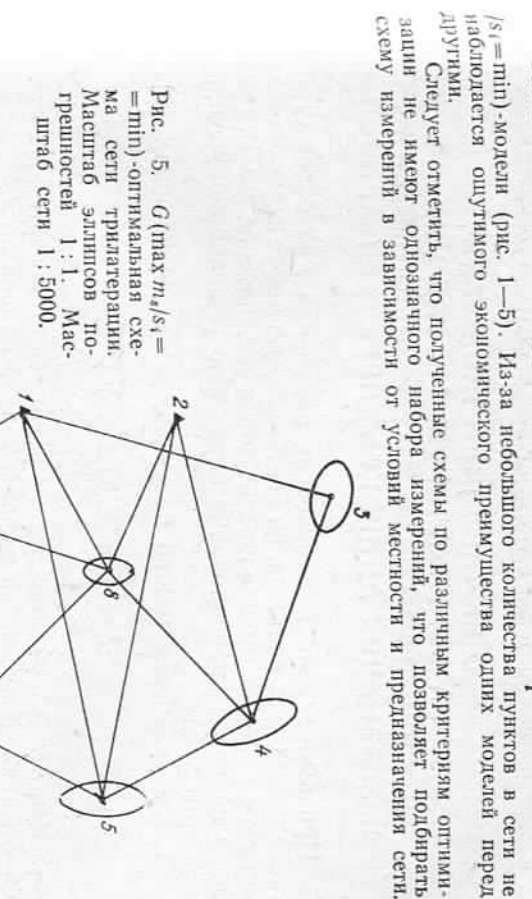


Рис. 5. G (max m_i/s_i = min) -оптимальная схема сети трилатерации. Масштаб эллипсов погрешностей 1 : 1. Масштаб сети 1 : 5000.

Экономически наиболее эффективны А, Д, I, G (max A = min), G (max m_i/s_i = min) - модели (рис. 1—5). Из-за небольшого количества пунктов в сети не наблюдается ощутимого экономического преимущества одних моделей перед другими.

Следует отметить, что полученные схемы по различным критериям оптимальности не имеют однозначного набора измерений, что позволяет подбирать схему измерений в зависимости от условий местности и предназначения сети.

Список литературы: 1. Герасименко М. Д. Проектирование и обработка измерений с применением собственных значений матриц. — Владивосток: Изд-во Дальневосточного ун-та, 1983. 2. Маркузе Ю. И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей. — М.: Недра, 1982. 3. Нейман Ю. М. Алгоритм проектирования геодезического построения на ЭВМ. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотогеодезия, 1966, № 6. 4. Тамбулис Э. П. Оптимальные методы проектирования геодезических сетей. — М.: Недра, 1979. 5. Трегьяк К. Р. Один из методов проектирования сетей трилатерации с помощью ЭВМ. — Геодезия, картография и аэрофотогеодезия, 1982, вып. 36. 6. Федорова В. В. Теория оптимального эксперимента. — М.: Наука, 1971. 7. Grafarend E. Optimization of Geodetic Networks. — Bull. geog. sc. off., 1974, v. 23. 8. Mischke C. R. An introduction to Computer-Aided Design. Englewood Cliffs. N. J.: Prentice-Hall, 1968. 9. Fletcher R., Reeves C. M. Function Minimization by Conjugate Gradients. Com-puter, J., 1964, № 7.