

*К. Р. ТРЕТЯК*

## **ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СХЕМ ИЗМЕРЕНИЙ В СЕТЯХ ТРИЛАТЕРАЦИИ**

Задача построения схем измерений в общей проблеме оптимального проектирования геодезических сетей решается в два этапа: проектированием схем необходимых измерений и избыточных [4, 7].

При последовательном наборе необходимых измерений по критерию максимальной информативности может возникнуть неопределенность очередного выбора из ряда измерений одинаковой информативности. Следовательно, оптимальное построение схем измерений не имеет однозначного решения, что, в свою очередь, ведет к неоднозначности составления окончательной схемы необходимых и избыточных измерений.

Задача оптимального проектирования схемы измерений состоит в нахождении такой схемы для сети с жестко закрепленными пунктами и заданной средней квадратической ошибкой измерений, которая удовлетворяет заданным условиям точности:

$$f_i^T K f_i \geq a_i, \quad (1)$$

где  $f_i$  — весовые функции;  $K$  — ковариационная матрица;  $a_i$  — заданные точные характеристики, — и соответствует минимальной стоимости. В сетях трилатерации под минимальной стоимостью будем подразумевать минимум измеряемых линий.

Предлагаем алгоритм, позволяющий избежать двухэтапного проектирования и составления схемы необходимых измерений. Суть алгоритма состоит в последовательном исключении измерений из группы всех допустимых по критерию минимизации приращения определенной функции ковариационной матрицы.

Первый шаг состоит в вычислении ковариационной матрицы всех допустимых измерений

$$K_g = \mu (A^T P A)^{-1}, \quad (2)$$

где  $\mu$  — ошибка единицы веса (приравнивается к средней квадратической ошибке измерений);  $A$  — матрица уравнений погрешностей всех допустимых измерений;  $P$  — весовая матрица.

При невыполнении неравенства

$$f_i^T K_g f_i \leq a_i \quad (3)$$

поставленная задача в предлагаемых условиях не решается.

При выполнении условий (3) вычисляется теоретически оптимальная ковариационная матрица  $K_{т.о.}$ , которая удовлетворяет требованиям:

$$F(K_{т.о.}) = \max; \quad (4) \quad f_i^T K_{т.о.} f_i \geq a_i; \quad (5) \quad \lambda_j(K_{т.о.}) > 0, \quad (6)$$

где  $F$  — функциональный критерий оптимизации;  $\lambda_j(K_{т.о.})$  — собственные значения  $K_{т.о.}$ .

Критерий  $F$  для соответствующих классов оптимизации принимают следующие значения:

$A$  — оптимизация  $S_p(K_{т.о.})$  — след матрицы;

$D$  — оптимизация  $\det(K_{т.о.})$  — детерминант матрицы;  $E$  — оптимизация  $\lambda_{\max}(K_{т.о.})$  — максимальное собственное число матрицы;  $I$  — оптимизация  $\lambda_{\min}(K_{т.о.})/\lambda_{\max}(K_{т.о.})$  — отношение минимального к максимальному собственным чисел матрицы.

Условие (5) соответствует положительной определенности ковариационной матрицы. Нахождение  $K_{т.о.}$  представляет задачу нели-

нейного программирования, решение которой производится методом сопряженных градиентов (метод Флетчера—Ривса) [9]. Он позволяет найти минимум нелинейной целевой функции многих переменных вида

$$M = F(x_1, x_2, \dots, x_L) \quad (7)$$

при отсутствии ограничений. Переменными в (7) будут элементы  $K_{T.0}$ . Так как  $K_{T.0}$  симметрична, то количество переменных  $L = n(n+1)/2$ , где  $n$  — удвоенное число пунктов.

Условия (5) и (6) учитываются в общей целевой функции с помощью штрафных функций. Общая целевая функция имеет вид

$$1/F(K_{T.0}) + \sum_{i=1}^m c_1 b_i |f_i^T K_{T.0} f_i - a_i| + \sum_{j=1}^n c_2 b_j |\lambda_j(K_{T.0})| = \min, \quad (8)$$

где  $c_1, c_2$  — постоянные коэффициенты;  $b=0$  при выполнении соответствующих условий (5) и (6);  $b=1$  при их нарушении.

Используемые штрафные функции в общем подобны функциям, приложенным в [8]. Общая целевая функция имеет унимодальный вид, что позволяет методом сопряженного градиента найти глобальный экстремум.

По методу Флетчера—Ривса сначала выбирают начальную точку в пространстве проектирования, координатами которой взяты значения соответствующих элементов матрицы  $K_g$ , так как при выполнении условия (3)  $n$ -мерный эллипсоид матрицы  $K_g$  принадлежит пространству, ограниченному  $n$ -мерным эллипсоидом  $K_{T.0}$ . Затем вычисляют компоненты вектора градиента

$$v_{ij} = \frac{-(dF/dK_{ij})}{\left[ \sum_{\xi=1}^n \sum_{\eta=\xi}^n (dF/dK_{\xi\eta})^2 \right]^{1/2}} \quad \begin{matrix} i=1, n \\ j=1, n \\ \xi=1, n \\ \eta=\xi, n \end{matrix} \quad (9)$$

и определяют направление наискорейшего спуска, а в направлении наискорейшего спуска ведут одномерный поиск по формуле

$$K_{ij_{\text{нов}}} = K_{ij_{\text{ст}}} + S v_{ij} \quad i \leq j, \quad (10)$$

где  $S$  — смещение в направлении вектора градиента. Найдя минимум в этом направлении, определяют направления новых единичных векторов.

По новому направлению проводят одновременный поиск и, найдя минимум, проверяют достигнута ли требуемая степень сходимости. Если да, то вычисления прекращаются и найденная матрица будет  $K_{T.0}$ , в противном случае процесс повторяется.

Для реализации на ЭВМ вычисления  $K_{T.0}$  применяем программу FMCG из пакета прикладных программ ЕС ЭВМ.

Целевая функция (8) формируется в подпрограмме FUNCT, входящей в программу FMCG.

Вместо определения частных производных вычисляем значение градиента

$$G_{ij} = \frac{F(K_{ij} + \Delta K) - F(K_{ij} - \Delta K)}{2\Delta K}, \quad (11)$$

где  $\Delta K$  — малые конечные приращения проектных параметров (принято  $\Delta K = 10^{-5}$ ).

В случае попадания проектной точки на линию излома уровней линий дальнейший поиск минимума по всем направлениям, кроме линии излома, теряет смысл. Для этого при выполнении

$$F(K_{ij} + \Delta K) > F(K_{ij}) \quad (12)$$

$$F(K_{ij} - \Delta K) > F(K_{ij}) \quad (13)$$

поиск по соответствующим направлениям не ведется, и  $G_{ij} = 0$ .

Учет условий (12) и (13) значительно ускоряет процесс поиска оптимального решения по программе FMCG.

Принимая во внимание ошибки исходных данных и то, что  $m_{\text{исх.д}} < \mu$ , поиск по элементам  $K_{ij}$ , соответствующим ошибкам исходных данных, производить нецелесообразно. Такой поиск будет вести к увеличению  $m_{\text{исх.д}}$ . В этом случае градиенты соответствующих элементов необходимо приравнять к нулю.

Подпрограмма FMCG требует введения приближенного значения оптимального решения. Удачный выбор этого значения и постоянных  $c_1$  и  $c_2$  (8) может значительно уменьшить время нахождения оптимальных параметров. В наших исследованиях значения  $c_1$  и  $c_2$  выбраны так, чтобы первый член (8) был на порядок меньше двух остальных. При уменьшении  $c_1$  и  $c_2$  возможен выход поиска за пределы проектного пространства, а с их увеличением уменьшается скорость нахождения оптимума.

Заключительная часть алгоритма — нахождение оптимальной схемы измерений путем последовательного исключения малоэффективных из группы допустимых измерений при условии выполнения требований:

$$F(K_i) - F(K_{i-1}) = \min; \quad (14)$$

$$\lambda_j(K_{\text{т.о}} - K_i) \geq 0 \quad j = 1, n, \quad (15)$$

где  $K_i, K_{i-1}$  — ковариационная матрица до и после исключения очередного определения.

Выполнение (15) обеспечивает принадлежность  $n$ -мерного эллипсоида погрешностей  $K_i$  пространству, ограниченному  $n$ -мерным эллипсоидом погрешностей  $K_{\text{т.о}}$ , и соответственно реализацию условия (1). Замена (1) условием (14) целесообразна только в случае большого количества разнообразных весовых функций. В противном случае вычисление  $K_{\text{т.о}}$  экономически неэффективно.

Уравнение (14) на каждом этапе отбора решают перебором всех линий из группы допустимых измерений. Линию, удовлетворяющую условию (14), из группы возможных изменений удаляют. Новую корреляционную матрицу вычисляют по рекуррентной формуле, предложенной в [7].

Если при отборе линий обнаружено невыполнение условия (15), то эти линии тоже исключают из группы возможных измерений. Их переводят в группу необходимых для получения оптимальной модели. Процесс продолжается до исчерпания группы возможных измерений.

Практическое использование алгоритма покажем на модельной сети (рис. 1).

**Пример.** Для сети из восьми жестко закрепленных пунктов требуется составить оптимальные схемы линейных измерений по  $A, D, E, I, G(\max A = \min_i A, G(\max m_\alpha = \min_i m_\alpha), G(\max m_s/s_i = \min_i m_s/s_i)$  по критериям оптимизации, где  $A$  — большая полуось максимального эллипса погрешностей;  $m_\alpha$  — максимальная погрешность направления;  $\frac{m_s}{s_i}$  — максимальная погрешность длины линии. Измерения в сети равноточны. Средняя квадратическая погрешность измерения расстояния  $m_s = 0,5$  см. Допустимые точностные параметры сети:  $A = 1,3$  см,  $m_\alpha = 10''$ ,  $\frac{m_s}{s_i} = 1/20\ 000$ . В таблице представлены результаты построения оптимальных схем по заданным критериям оптимизации.

Характеристики оптимальных моделей

Оптимальная модель	Количество необходимых линий	Название необходимых линий	Максимальные точностные параметры		
			A, см	$m_\alpha''$	$m_s/s_i$
A	14	3-4, 4-5, 1-7, 1-5, 2-3, 4-6, 6-7, 2-4, 2-5, 2-8, 1-6, 1-8, 2-6, 7-8	1,23	8,3	1/27 000
D	14	1-5, 1-8, 2-5, 2-8, 6-7, 3-4, 1-7, 2-4, 4-5, 4-8, 5-6, 6-8, 7-8, 2-3	1,29	9,1	1/39 000
E	16	1-5, 3-4, 4-5, 6-7, 1-3, 1-6, 1-7, 2-3, 2-8, 3-6, 4-8, 7-8, 2-5, 1-8, 2-4, 2-6,	1,23	7,9	1/20 000
I	14	3-4, 4-5, 4-7, 5-6, 1-4, 1-7, 1-8, 2-5, 2-3, 1-6, 2-6, 2-8, 3-8, 1-5	1,15	9,3	1/31 000
$G(\max A = \min_i A)$	14	4-5, 5-6, 3-5, 5-7, 2-3, 1-7, 2-5, 2-8, 1-4, 1-5, 1-6, 2-4, 2-6, 7-8	1,14	8,5	1/28 000
$G(\max m_\alpha = \min_i m_\alpha)$	15	3-4, 6-7, 3-5, 5-7, 1-5, 1-7, 1-8, 2-3, 1-4, 2-4, 2-5, 2-8, 3-6, 3-8, 1-6	1,20	7,6	1/22 000
$G(\max \frac{m_s}{s_i} = \min_i \frac{m_s}{s_i})$	14	1-5, 2-5, 1-8, 2-4, 2-8, 6-7, 6-8, 7-8, 3-4, 4-5, 4-8, 1-7, 5-6, 1-3	1,29	9,1	1/41 000

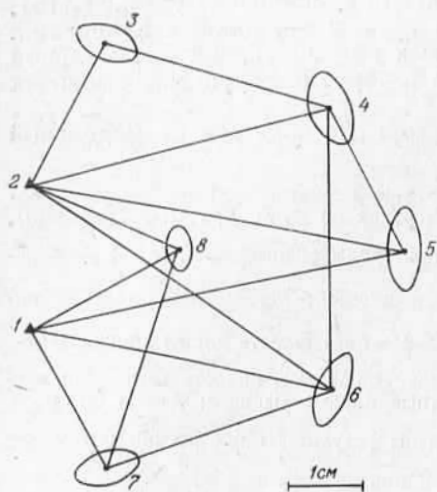


Рис. 1. *A*-оптимальная схема сети трилатерации. Масштаб эллипсов погрешностей 1:2. Масштаб сети 1:5000.

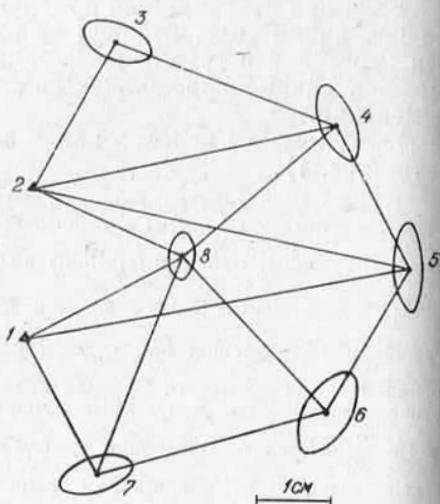


Рис. 2. *D*-оптимальная схема сети трилатерации. Масштаб эллипсов погрешностей 1:2. Масштаб сети 1:5000.

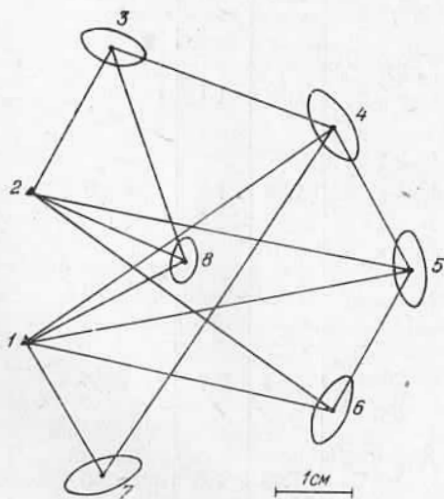


Рис. 3. *I*-оптимальная схема сети трилатерации. Масштаб эллипсов погрешностей 1:2. Масштаб сети 1:5000.

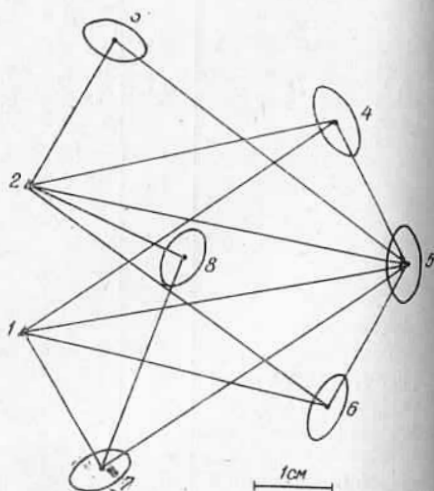


Рис. 4. *G* ( $\max A = \min$ )-оптимальная схема сети трилатерации. Масштаб эллипсов погрешностей 1:2. Масштаб сети 1:5000.

Экономически наиболее эффективны  $A$ -,  $D$ -,  $I$ -,  $G(\max A = \min)$ -,  $G(\max m_s / s_i = \min)$ -модели (рис. 1—5). Из-за небольшого количества пунктов в сети не наблюдается ощутимого экономического преимущества одних моделей перед другими.

Следует отметить, что полученные схемы по различным критериям оптимизации не имеют однозначного набора измерений, что позволяет подбирать схему измерений в зависимости от условий местности и предназначения сети.

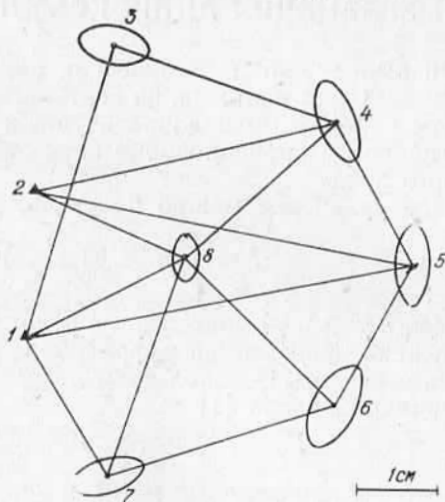


Рис. 5.  $G(\max m_s / s_i = \min)$ -оптимальная схема сети трилатерации. Масштаб эллипсов погрешностей 1:1. Масштаб сети 1:5000.

**Список литературы:** 1. Герасименко М. Д. Проектирование и обработка измерений с применением собственных значений матриц. — Владивосток: Изд-во Дальневосточного ун-та, 1983. 2. Маркузе Ю. И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей. — М.: Недра, 1982. 3. Нейман Ю. М. Алгоритм проектирования геодезического построения на ЭВМ. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1966, № 6. 4. Тамулис З. П. Оптимальные методы проектирования геодезических сетей. — М.: Недра, 1979. 5. Третьяк К. Р. Один из методов проектирования сетей трилатерации с помощью ЭВМ. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1982, вып. 36. 6. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента. — М.: Наука, 1971. 7. Grafarend E. Optimization of Geodetic Networks, — Bull. geog. sc. off., 1974, v. 23. 8. Mischke C. R. An introduction to Computer-Aided Design, Englewood Cliffs. N. J.: Prentice-Hall, 1968. 9. Fletcher R., Reeves C. M. Function Minimization by Conjugate Gradients, *Computer*, J., 1964, № 7.