УДК 528.21:531.26

О. Ф. РЕЗАНОВА

ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ТРЕХОСНОЙ ЗЕМЛИ

При решении задач, учитывающих влияние Земли на другие тела, необходимо иметь потенциал притяжения земного эллипсоида. Этот потенциал до сих пор представлялся в виде разложения по сферическим функциям, что соответствует представлению о шарообразности Земли. Однако фигура геоида лучше всего может быть представлена трехосным эллипсоидом, и естественно поэтому получить потенциал притяжения именно для трехосного эллипсоида, что ближе всего соответствует всем современным данным астрономии и геодезии.

Известно, что потенциал притяжения трехосного эллипсоида при разложении его по функциям Ляме выражается конечным рядом [2, стр. 22].

$$V = A_0S_0 + A_7S_7M_7N_7 + A_8S_8M_8N_8, \tag{1}$$

где A_0, A_7, A_8 — коэффициенты разложения ($A_0 = fM$ — постоянная притяжения, M — масса Земли);

$$A_7 = \frac{\omega^2}{6(\alpha_1 - \alpha_2)S_7^0}\left[\frac{R_7^0}{1-\alpha_1} + 2\right];$$

$$A_8 = \frac{\omega^2}{6(\alpha_2 - \alpha_1)S_8^0}\left[\frac{R_8^0}{1-\alpha_2} + 2\right]. \tag{2}$$

(формулы (2) получены из условия равновесия эллипсоида); S_0, S_7, S_8 — функции Ляме второго рода; R_7, R_8, M_7, M_8, N_7, N_8 — функции Ляме первого рода; $R(\rho)$, $M(\mu)$, $N(\gamma)$; ρ, μ, γ — эллиптические координаты; ω — угловая скорость вращения Земли; α_1, α_2 — корни уравнения [2, стр. 19];

$$3\alpha^2 - 2(1+\eta^2)\alpha + \eta^2 = 0,$$

η — параметр эллипсоида,

$$\frac{x^2}{\rho_0^2} + \frac{y^2}{\rho_0^2 - \eta^2} + \frac{z^2}{\rho_0^2 - 1} = 1$$

$\left(\text{в общепринятых обозначениях } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right)$.

За единицу длины здесь принято фокусное расстояние эллипса меридианного сечения, то есть $a^2 - c^2 = 1$. Поэтому имеют место следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} e^2 &= \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{1}{\rho_0^2};\\ e'^2 &= \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{\eta^2}{\rho_0^2};\\ \eta &= \frac{e'}{e} \end{aligned}\right| , \tag{3}$$

где e^2 —наибольший эксцентриситет эллипса меридианного сечения; e'^2 —эксцентриситет эллипса экваториального сечения.

Положив в формуле (1) $A_0=fM$ и вынося $\frac{fM}{\rho}$ за скобку [2, стр. 15], получим

$$V=\frac{fM}{\rho}\left(S_0\rho+\frac{A_7S_7\rho}{fM}M_7N_7+\frac{A_8S_8\rho}{fM}M_8N_8\right). \tag{4}$$

Введем обозначения

$$S_0\rho=a_0,\quad \frac{A_7S_7\rho}{fM}=a_7,\quad \frac{A_8S_8\rho}{fM}=a_8.$$

Тогда

$$V=\frac{fM}{\rho}(a_0+a_7M_7N_7+a_8M_8N_8). \tag{5}$$

Найдем выражения для коэффициентов a_0, a_7, a_8.

Функции Ляме второго рода

$$S=(2n+1)R\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{d\rho}{R^2R_1R_2},$$

где R_1, R_2 — функции Ляме первого рода и первого порядка, $R_1=\sqrt{\rho^2-1}$, $R_2=\sqrt{\rho^2-\eta^2}$; R — функция того же порядка, что и определяемая этой формулой S; n — порядок функции.

Поэтому

$$S_0=R_0\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{d\rho}{R_0^2R_1R_2},$$

но $R_0=1$ и, следовательно,

$$S_0=\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{d\rho}{R_1R_2}=\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-1}\cdot\sqrt{\rho^2-\eta^2}}.$$

Разложив подынтегральную функцию в ряд и почленно интегрируя, получим $\left(\text{удерживая члены, включая } \frac{1}{\rho^6}\right)$

$$S_0=\frac{1}{\rho}\left[1+\frac{1+\eta^2}{6}\cdot\frac{1}{\rho^2}+\frac{3+2\eta^2+3\eta^4}{40}\cdot\frac{1}{\rho^4}+\frac{5+3\eta^2+3\eta^4+5\eta^6}{112}\cdot\frac{1}{\rho^6}+\cdots\right].$$

Следовательно

$$a_0=1+\frac{1+\eta^2}{6}\cdot\frac{1}{\rho^2}+\frac{3+2\eta^2+3\eta^4}{40}\cdot\frac{1}{\rho^4}+\frac{5+3\eta^2+3\eta^4+5\eta^6}{112}\cdot\frac{1}{\rho^6}+\cdots$$

или, используя первое из соотношений (3), получим:

$$a_0=1+\frac{1+\eta^2}{6}e^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2+\frac{3+2\eta^2+3\eta^4}{40}e^4\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^4+$$

$$+\frac{5+3\eta^2+3\eta^4+5\eta^6}{112}e^6\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^6+\cdots \tag{6}$$

Найдем теперь a_7, и a_8

$$a_7 = \frac{A_7 S_7 \rho}{fM};$$

$$A_7 = \frac{\omega^2}{6(\alpha_1 - \alpha_2)S_7^0}\left[\frac{R_7^0}{1-\alpha_1} + 2\right] \text{ (по формуле (2)).}$$

Так как $R_7^0 = \varrho_0^2 - \alpha_1$, то

$$A_7 = \frac{\omega^2}{6(\alpha_1 - \alpha_2)S_7^0}\left[\frac{\rho_0^2 - \alpha_1}{1-\alpha_1} + 2\right] = \frac{\omega^2}{6(\alpha_1 - \alpha_2)S_7^0} \cdot \frac{\rho_0^2 - 3\alpha_1 + 2}{1-\alpha_1} =$$

$$= \frac{\omega^2 \rho_0^2}{6(\alpha_1 - \alpha_2)(1-\alpha_1)S_7^0}\left(1 + \frac{2 - 3\alpha_1}{\rho_0^2}\right) = \frac{\omega^2 \rho_0^2}{6(\alpha_1 - \alpha_2)(1-\alpha_1)S_7^0}[1 + (2 - 3\alpha_1)e^2].$$

Подставляя A_7 в a_7, получим

$$a_7 = \frac{\omega^2 \rho_0^2 (1 + 2e^2 - 3\alpha_1 e^2)}{6(\alpha_1 - \alpha_2)(1-\alpha_1)S_7^0} \cdot \frac{S_7 \rho}{fM} = \varkappa \frac{1 + 2e^2 - 3\alpha_1 e^2}{6(\alpha_1 - \alpha_2)(1-\alpha_1)} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{S_7}{S_7^0}. \tag{7}$$

Аналогично

$$a_8 = \varkappa \frac{1 + 2e^2 - 3\alpha_2 e^2}{6(\alpha_2 - \alpha_1)(1-\alpha_2)} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{S_8}{S_8^0}, \tag{7'}$$

где $\varkappa = \dfrac{\omega^2 \rho_0^3}{fM}$ — отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе сферической Земли.

Представим S_7 и S_8 по степеням ϱ. Так как

$$S_7 = 5R_7 \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{R_7^2 R_1 R_2},$$

$$S_8 = 5R_8 \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{R_8^2 R_1 R_2},$$

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 - 1}, \; R_2 = \sqrt{\rho^2 - \eta^2}, \; R_7 = \rho^2 - \alpha_1, \; R_8 = \rho^2 - \alpha_2,$$

то, разложив в ряд подынтегральные функции, интегрируя и умножая на $5R_7$ и $5R_8$, соответственно получим:

$$S_7 = \frac{1}{\rho^3}\left\{1 + \frac{c_1'}{\rho^2} + \frac{c_2'}{\rho^4} + \frac{c_3'}{\rho^6} + \cdots\right\};$$

$$S_8 = \frac{1}{\rho^3}\left\{1 + \frac{c_1''}{\rho^2} + \frac{c_2''}{\rho^4} + \frac{c_3''}{\rho^6} + \cdots\right\},$$

где введены такие обозначения:

$$c_1' = \frac{1 + \eta^2 + 4\alpha_1}{2} \cdot \frac{5}{7} - \alpha_1;$$

$$c_2' = \frac{3 + 2\eta^2 + 3\eta^4 + 8\alpha_1(1 + \eta^2) + 24\alpha_1^2}{8} \cdot \frac{5}{9} - \frac{1 + \eta^2 + 4\alpha_1}{2} \cdot \frac{5}{7}\alpha_1;$$

$$c_3' = \left[\frac{5+3\eta^2+3\eta^4+5\eta^6}{16} + \frac{3+2\eta^2+3\eta^4}{4}\cdot\alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_1^2(1+\eta^2)+4\alpha_1^3\right]\frac{5}{11} -$$

$$- \frac{3+2\eta^2+3\eta^4+8\alpha_1(1+\eta^2)+24\alpha_1^2}{8}\cdot\frac{5}{9}\alpha_1,$$

c_1'', c_2'', c_3'' имеют тот же вид, только α_1 соответственно заменено на α_2.
Естественно, что

$$S_7^0 = \frac{1}{\rho_0^3}\left\{1 + \frac{c_1'}{\rho_0^2} + \frac{c_2'}{\rho_0^4} + \frac{c_3'}{\rho_0^6} + \cdots\right\};$$

$$S_8^0 = \frac{1}{\rho_0^3}\left\{1 + \frac{c_1''}{\rho_0^2} + \frac{c_2''}{\rho_0^4} + \frac{c_3''}{\rho_0^6} + \cdots\right\}.$$

Подставляя значения S_7, S_8, S_7^0, S_8^0 в формулы (7), получим

$$a_7 = \varkappa\frac{1+2e^2-3\alpha_1 e^2}{6(\alpha_1-\alpha_2)(1-\alpha_1)}\cdot\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\cdot\frac{1+\frac{c_1'}{\rho^2}+\frac{c_2'}{\rho^4}+\frac{c_3'}{\rho^6}+\cdots}{1+\frac{c_1''}{\rho_0^2}+\frac{c_2''}{\rho_0^4}+\frac{c_3'}{\rho_0^6}+\cdots}.$$

Используя (3), найдем

$$a_7 = \varkappa\frac{1+2e^2-3\alpha_1 e^2}{6(\alpha_1-\alpha_2)(1-\alpha_1)(1+c_1'e^2+c_2'e^4+c_3'e^6+\cdots)}\left[\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + c_1'e^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^4 + c_2'e^4\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^6 + \cdots\right];$$

$$a_8 = \varkappa\frac{1+2e^2-3\alpha_2 e^2}{6(\alpha_2-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1+c_1''e^2+c_2''e^4+c_3''e^6+\cdots)}\left[\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 + \right. \tag{8}$$

$$\left. + c_1''e^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^4 + c_2''e^4\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^6 + \cdots\right].$$

Рассматривая связь эллиптических координат с прямоугольными и прямоугольных — со сферическими координатами Θ и ψ (Θ отсчитывается на оси Oz, ψ от оси Oy), можно получить выражения для M_7N_7 и M_8N_8 через координаты Θ и ψ [2, стр. 49].

$$M_7N_7 = \eta^2\sin^2\Theta\sin^2\psi - \alpha_1[\sin^2\Theta(1-\eta^2\cos^2\psi)+\eta^2] + \alpha_1^2;$$

$$M_8N_8 = \eta^2\sin^2\Theta\sin^2\psi - \alpha_2[\sin^2\Theta(1-\eta^2\cos^2\psi)+\eta^2] + \alpha_2^2.$$

Подставляя последние выражения M_7N_7 и M_8N_8, а также значения a_0, a_7, a_8 из (6) и (8) в формулу (5), получим:

$$V = \frac{fM}{\rho}\left\{1 + \frac{1+\eta^2}{6}e^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 + \frac{3+2\eta^2+3\eta^4}{40}e^4\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^4 + \right.$$

$$+ \frac{5+3\eta^2+3\eta^4+5\eta^6}{112}e^6\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^6 + \cdots +$$

$$+ \varkappa\frac{(1+2e^2-3\alpha_1e^2)[\eta^2\sin^2\Theta\sin^2\psi-\alpha_1(\sin^2\Theta-\eta^2\sin^2\Theta\cos^2\psi)-\alpha_1\eta^2+\alpha_1^2]}{6(\alpha_1-\alpha_2)(1-\alpha_1)(1+c_1'e^2+c_2'e^4+c_3'e^6+\cdots)}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 + c_1'e^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^4 + c_2'e^4\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^6 + \cdots\right] +$$

$$+\varkappa\frac{(1+2e^2-3\alpha_2 e^2)[\eta^2\sin^2\Theta\sin^2\psi-\alpha_2(\sin^2\Theta-\eta^2\sin^2\Theta\cos^2\psi)-\alpha_2\eta^2+\alpha_2^2]}{6(\alpha_2-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1+c_1''e^2+c_2''e^4+c_3''e^6+\cdots)}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2+c_1''e^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^4+c_2''e^4\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^6+\cdots\right]. \quad (9)$$

Численные значения коэффициентов формулы (9) были подсчитаны для трехосного эллипсоида: $\rho=6378351{,}3$ *м*; $\alpha=0{,}003368940$; $\alpha'=0{,}000033333$; $\lambda=15°$ Ost.

Для fM взято международное значение $398\,603\cdot 10^9$ *м*^{3}/*сек*^{2} [3, стр. 474]. Все подсчеты велись с учетом девятого знака после запятой. При вычислении M_7N_7 и M_8N_8 проделан переход от сферических координат Θ и ψ к широте φ и долготе λ, отсчитываемой от наибольшего меридиана $\varphi=90°-\Theta$, $\lambda=90°-\psi$.

В результате получим окончательное разложение потенциала притяжения для трехосного эллипсоида в виде:

$$V=\frac{fM}{\rho}\Big\{1+(0{,}002\,281\,042-0{,}001\,723\,265\cos^2\varphi-$$

$$-0{,}000\,000\,066\cos^2\varphi\cos 2\lambda)\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2+(0{,}000\,008\,417-$$

$$-0{,}000\,007\,501\cos^2\varphi+0{,}000\,000\,008\cos^2\varphi\cos 2\lambda)\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^4+$$

$$+(0{,}000\,000\,037-0{,}000\,000\,035\cos^2\varphi)\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^6+\cdots\Big\}. \quad (10)$$

Интересно сравнить это разложение для потенциала притяжения с разложением потенциала по сферическим функциям, полученным И. Д. Жонголовичем [1, стр. 521, формула (81)].

Для точки $\delta=0$, $t=0$ из его формулы имеем

$$V=\frac{fM}{\rho}\Big\{1+0{,}000\,55030\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2+0{,}000\,00332\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^3+$$

$$+0{,}000\,00239\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^4+\cdots\Big\}. \quad (11)$$

По формуле (10) для той же точки находим

$$V=\frac{fM}{\rho}\Big\{1+0{,}000\,557\,720\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2+0{,}000\,000\,923\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^4+$$

$$+0{,}000\,000\,002\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^6+\cdots\Big\}. \quad (12)$$

Если взять $\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{6}{7}$, то из (11)

$$V=\frac{fM}{\rho}(1+0{,}0004\,0768),$$

из (12)

$$V=\frac{fM}{\rho}(1+0{,}000\,410\,252).$$

Приведенное сравнение показывает, что порядок значения потенциала сохраняется при вычислении его по формуле (10) и по формуле И. Д. Жонголовича. Однако следует думать, что разложение (10), основанное на применении эллиптических функций, более естественно для трехосного эллипсоида.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жонголович И. Д. Потенциал земного притяжения. Бюлл. Инст. теорет. астр., т. VI, № 8 (81), 1957.
2. Загребин Д. В. Уровенный трехосный эллипсоид и сила тяжести на его поверхности. Изд-во АН СССР, 1948.
3. Загребин Д. В. Введение в астрометрию. «Наука», М.—Л., 1966.

Работа поступила
7 мая 1967 г.