

## МОДЕЛЮВАННЯ СЕРЕДОВИЩА ІЗ ЗАДАНОЮ МАГНІТНОЮ ПРОНИКНІСТЮ НА ОСНОВІ АСИМПТОТИЧНОГО РОЗВ’ЯЗКУ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО РОЗСІЯННЯ

© Андрійчук М. І., Ткачук В. П., 2011

Розглядається задача розсіяння електромагнітних хвиль малими імпедансними тілами (включеннями), які поміщені у однорідне середовище, з метою формування середовища із заданою магнітною проникністю. Фізичні властивості включень описуються їх поверхневим імпедансом. Отримано граничне інтегральне рівняння для ефективного електромагнітного поля при  $a \rightarrow 0$ , де  $a$  – характерний розмір включень, а  $M(a)$  – кількість включень. Запропонований підхід дає змогу формувати середовище із заданою просторовою неоднорідністю. Наведено результати числового моделювання.

**Ключові слова:** електромагнітне розсіяння, малі включення, задана магнітна проникність, числове моделювання.

The problem of scattering of electromagnetic (EM) waves by many small impedance particles (bodies), embedded in a homogeneous medium is studied in order to create medium with desired permeability. Physical properties of the particles are described by their boundary impedance. The limiting integral equation is obtained for the effective EM field in the limiting medium, at  $a \rightarrow 0$ , where  $a$  is the characteristic size of a particle and  $M(a)$  is the number of particles. The proposed approach allows one to create a medium with a desirable spatially inhomogeneous permeability. The results of computational modeling are presented.

**Keywords:** electromagnetic scattering, small particles, desired permittivity, numerical modeling.

### Вступ

Теорія електромагнітного розсіяння малими включеннями, які знаходяться в певній області однорідного простору, що описується постійною діелектричною проникністю  $\epsilon_0 > 0$ , магнітною проникністю  $\mu_0 > 0$  і, можливо, постійною провідністю  $\sigma_0 \geq 0$ , використовується для конструювання середовища із заданою магнітною проникністю  $\mu$ . Обчислювальні алгоритми розв’язання відповідної задачі дифракції було розроблено у роботі [1].

Малі включення поміщаються у скінченну область  $D$ . Таке середовище володіє новими фізичними властивостями. Зокрема, воно має просторово не однорідну магнітну проникність  $\mu(x)$ , яка може контролюватися вибором поверхневого імпедансу включень і густиною їхнього розподілу. Отримано аналітичну формулу для магнітної проникності нового середовища.

Припустимо, що в заданій підобласті  $\Delta$  області  $D$  кількість  $M$  малих включень задається формулою:

$$M = \frac{1}{a^{2-\kappa}} \int_{\Delta} N(x) dx [1 + o(1)], a \rightarrow 0, \quad (1)$$

де  $N(x) \geq 0$  – неперервна функція, яка спадає поза скінченною областю  $D$ , де розміщені вклучення,  $\kappa \in (0,1)$  – довільне задане число, а граничний імпеданс малих вклучень визначається так:

$$\zeta_m = \frac{h(x_m)}{a^\kappa}, x_m \in D_m, \quad (2)$$

де  $x_m$  – точка всередині  $m$ -го вклучення,  $\operatorname{Re} h(x) \geq 0$ , а  $h(x)$  – неперервна функція, яка спадає поза  $D$ . Імпедансні граничні умови на поверхні  $S_m$   $m$ -го вклучення  $D_m$  задаються так:  $E^t = \zeta_m [H^t, N]$ , де  $E^t$  ( $H^t$ ) – тангенціальні компоненти  $E$  ( $H$ ) на  $S_m$ , а  $N$  – зовнішня нормаль на  $S_m$ .

Слід зауважити, що коефіцієнт заломлення  $n^2(x)$  у сформованому кінцевому середовищі також буде неоднорідним.

Запропонований підхід має спільні особливості з викладеними у працях [2–4], але ідея, методи і реалізація відрізняються значною мірою. Ці ідеї аналогічні запропонованим у [5, 6] для скалярного випадку. Однак розсіяння електромагнітних хвиль породжує нові технічні труднощі, які розв’язано у цій статті. Вони пояснюються векторним характером граничних умов. Запропонований підхід може бути використано для малих вклучень довільної форми, але для простоти ми обмежимося вклученнями у формі кулі радіусом  $a$  [7].

### Розсіяння електромагнітних хвиль малими вклученнями

Нехай сукупність малих вклучень  $D_m$ ,  $1 \leq m \leq M$  розміщена в однорідному середовищі з постійними параметрами  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ , а  $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ , де  $\omega$  – частота. Це справедливо і для випадку, коли середовище має постійну провідність  $\sigma_0 > 0$ . У цьому випадку  $\epsilon_0$  замінюється на  $\epsilon_0 + i \frac{\sigma_0}{\omega}$ .

Розв’язання задачі розсіяння полягає у знаходженні векторів  $E$  і  $H$ , які задовольняють рівняння Максвелла

$$\nabla \times E = i\omega \mu_0 H, \quad \nabla \times H = -i\omega \epsilon_0 E \quad (3)$$

в  $D := \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{m=1}^M D_m$ , імпедансні граничні умови

$$[N, [E, N]] = \zeta_m [H, N] \quad (4)$$

на  $S_m, 1 \leq m \leq M$  і умови випромінювання на безмежності

$$E = E_0 + v_E, \quad H = H_0 + v_H, \quad (5)$$

де  $\zeta_m$  – імпеданс,  $N$  – зовнішня нормаль до  $S_m$ ,  $E_0, H_0$  – вектори падаючого поля, які задовольняють рівняння (3) у всьому просторі  $\mathbb{R}^3$ . Як правило, припускають, що падаюче поле – плоска хвиля  $E_0 = \beta e^{i\kappa \alpha \cdot x}$ ,  $\beta$  – певний сталий вектор,  $\alpha \in S^2$  – одиничний вектор,  $S^2$  – одинична сфера в  $\mathbb{R}^3$ ,  $v_E$  і  $v_H$  задовольняють граничні умови:

$$r \left( \frac{\partial v}{\partial r} - ikv \right) = o(1). \quad (6)$$

Систему (3) можна звести до вигляду

$$\nabla \times \nabla \times E = k^2 E \text{ in } D, \quad H = \frac{\nabla \times E}{i\omega \mu_0}. \quad (7)$$

Отже, початкову задачу зведено до знаходження вектора  $E(x)$ . Якщо  $E(x)$  знайдено, то

$$H = \frac{\nabla E}{i\omega \mu_0}.$$

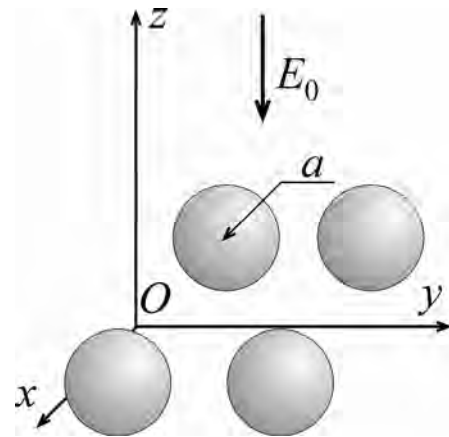


Рис. 1. Геометрія задачі при  $M = 4$

Вектор  $E$  шукатимемо у формі

$$E = E_0 + \sum_{m=1}^M \nabla \times \int_{S_m} g(x,t) \sigma_m(t) dt, \quad (8)$$

де  $t \in S_m$ , а  $dt$  – елемент площі  $S_m$ ,  $\sigma_m(t) \in T_m$ . Отримане  $E$  для довільної неперервної  $\sigma_m(t)$  є розв'язком рівняння (3) в  $D$ , оскільки  $E_0$  задовольняє (5), а

$$g(x,t) = \frac{e^{ik|x-t|}}{4\pi|x-t|} \quad (9)$$

– функція Гріна.

Визначимо *ефективне поле*  $E_e(x) = E_e^m(x) = E_e^{(m)}(x, a)$ , яке діє на  $m$ -у включенні  $D_m$ :

$$E_e(x) = E(x) - \nabla \times \int_{S_m} g(x,t) \sigma_m(t) dt := E_e^{(m)}(x). \quad (10)$$

Хоча точка  $x$  і належить околу  $S_m$ , але  $E_e(x)$  визначене для всіх  $x \in \mathbb{R}^3$ . Нехай  $x_m \in D_m$  – точка в  $D_m$ , і  $d = d(a)$  – відстань між двома сусідніми малими включеннями. Нехай

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{d(a)} = 0, \quad \lim_{a \rightarrow 0} d(a) = 0. \quad (11)$$

У роботі [7] показано, що  $E_e(x, a)$  прямує до границі  $E_e(x)$  при  $a \rightarrow 0$ , а  $E_e(x)$  – неперервна двічі диференційована функція.

Припустимо, що у будь-якій підобласті  $\Delta$  кількість включень  $N(\Delta)$  задано формулою (1), де  $N(x) \geq 0$  – неперервна функція, яка прямує до нуля поза скінченною областю  $D$ , в якій розміщені включення  $D_m$ . Запишемо (10) так:

$$E(x) = E_0(x) + \sum_{m=1}^M [\nabla_x g(x, x_m), Q_m] + \sum_{m=1}^M \nabla \times \int_{S_m} (g(x,t) - g(x, x_m)) \sigma_m(t) dt, \quad (12)$$

де

$$Q_m := \int_{S_m} \sigma_m(t) dt. \quad (13)$$

Покажемо, що другим доданком у формулі (12) можна знехтувати. Оскільки  $\sigma_m = O(a^{-\kappa})$ , то  $Q_m = O(a^{2-\kappa})$ . Покажемо, що другий доданок у (12) є набагато меншим порівняно з першим. Це доведення ґрунтується на декількох оцінках. Запишемо (12) так:

$$E_e(x) = E_0(x) + \sum_{m=1}^M [\nabla_x g(x, x_m), Q_m] \quad (14)$$

з похибкою, що прямує до нуля при  $a \rightarrow 0$ , і коли  $|x - x_j| \gg a$ , то член з  $m = j$  повинен бути опущений згідно з означенням ефективного поля. Покажемо, що границя ефективного поля при  $a \rightarrow 0$  існує і є розв'язком рівняння (14). При  $a \rightarrow 0$  сума в (14) збігається до відповідного інтегралу і

$$E(x) = E_0(x) + \nabla \times \int_D g(x, y) N(y) Q(y) dy, \quad (15)$$

де  $Q(y)$  – функція, що визначається однозначно. Цю функцію можна подати в термінах  $E$

$$Q(y) = -\frac{8\pi i}{3\omega\mu_0} h(y) (\nabla \times E)(y). \quad (16)$$

З рівнянь (15) і (16) отримаємо

$$E(x) = E_0(x) - \frac{8\pi i}{3\omega\mu_0} \nabla \times \int_D g(x, y) h(y) N(y) \nabla \times E(y) dy. \quad (17)$$

Вектори

$$P := \nabla \times E(y) \quad (18)$$

використовуємо для визначення  $E(y)$  у процесі числових розрахунків.

Визначимо магнітну проникність  $\mu(x)$ . Нехай

$$\Psi(x) := 1 + \frac{8\pi i}{3\omega\mu_0} h(x)N(x). \quad (19)$$

Позначимо  $\varepsilon(x) = \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0 = const$ , а функція  $\mu(x)$

$$\mu(x) = \frac{\mu_0(x)}{\Psi(x)}. \quad (20)$$

Остаточно формула (19) має простий фізичний зміст: електромагнітні властивості граничного середовища описуються змінною магнітною проникністю:

$$\mu(x) = \frac{\mu_0(x)}{\Psi(x)} = \frac{\mu_0}{1 + \frac{8\pi i}{3\omega\mu_0} h(x)N(x)}, \quad (21)$$

і граничне середовище описується новим коефіцієнтом відбиття  $K^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu(x)$ .

### Лінійна алгебраїчна системи для векторів $P$

Числове розв'язування задачі розсіювання у випадку, коли розсіювачі (включення) є малими порівняно з довжиною хвилі, полягає у отриманні та розв'язуванні відповідної системи лінійних рівнянь для векторів

$$P_m = (\nabla \times E)(x_m), \quad 1 \leq m \leq M, \quad (22)$$

які визначаються формулою (18).

Якщо  $P_m$  знайдено, то за формулою (16) визначаємо

$$Q_m = -\frac{8\pi i}{3\omega\mu_0} a^{2-\kappa} h(x_m)P_m, \quad (23)$$

а за формулою (17) – поле  $E(x)$ .

Алгебраїчну систему для векторів  $P_m$  одержуємо так: з (17) випливає, що

$$P_j = P_{0j} - \frac{8\pi i}{3\omega\mu_0} a^{2-\kappa} \sum_{m \neq j, m=1}^M \{k^2 g(x, x_m) h(x_m) P_m + h(x_m) (P_m, \nabla) \nabla g(x, x_m)\} |_{x=x_j}, \quad (24)$$

де  $1 \leq j \leq M$ , і

$$P_{0j} := (\nabla \times E_0)(x_j), \quad P_j = (\nabla \times E)(x_j), \quad 1 \leq j \leq M. \quad (25)$$

Остаточно рівняння (24) є алгебраїчною системою для знаходження векторів  $P_m$ .

### Числове моделювання

На першому етапі важливим є дослідження збіжності розв'язків системи (24). Ця система є квазілінійною, оскільки вона містить значення невідомих векторів  $P_m$  у лівій і правій частинах у членах  $(P_m, \nabla) \nabla g(x, x_m)$ . Тому для розв'язання такої системи необхідно використовувати метод послідовних наближень. На підставі числових розрахунків було встановлено, що збіжність розв'язків системи (24) залежить від співвідношення  $d$  до  $a$  за фіксованого значення  $M$ . Обчислення показали, що значення  $d/a \approx 10$  є граничним зверху, яке ще забезпечує збіжність. Ітераційний процес розв'язування (24) при  $d/a < 10$  стає нестійким і розбігається при спаданні  $d/a$ .

На рис. 2 показано значення магнітної проникності  $\mu$ , пораховані за формулою (21), залежно від радіуса  $a$  включення. Тут і нижче всі отримані значення  $\mu$  нормовані на величину  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Nm}^{-1} = 1.256 \cdot 10^{-6} \text{ Nm}^{-1}$ . Значення  $k = 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ , що відповідає частоті  $f = 47.86 \text{ GHz}$ ; радіус  $a = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m} - 8 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ ;  $d$  вимірюється у  $\text{mm}(\text{m}^{-3})$ . Видно, що значення  $\mu$  для більших  $d$  ближчі до початкового значення  $\mu_0 = 1$  середовища без включень. Це легко пояснюється з фізичного погляду, оскільки із збільшенням  $d$  властивості області  $D$  збігаються із властивостями середовища без включень.

На рис. 3 наведено залежність проникності  $\mu$  для різних значень  $d$  і оптимальних параметрах області  $D$ , які забезпечують збіжність ітераційного процесу розв'язування системи (24). Видно, що значення  $\mu$  при цих співвідношеннях змінити значною мірою не вдається, максимальне відхилення від початкового значення  $\mu_0$  не перевищує 40 %, а при великих значеннях  $d$  отримані величини  $\mu$  мало відрізняються від проникності  $\mu_0$  середовища без включень.

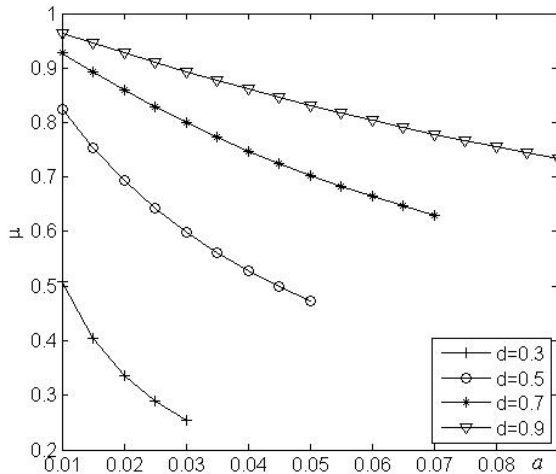


Рис. 2. Залежність модуля проникності  $\mu$  від радіуса включення  $a$

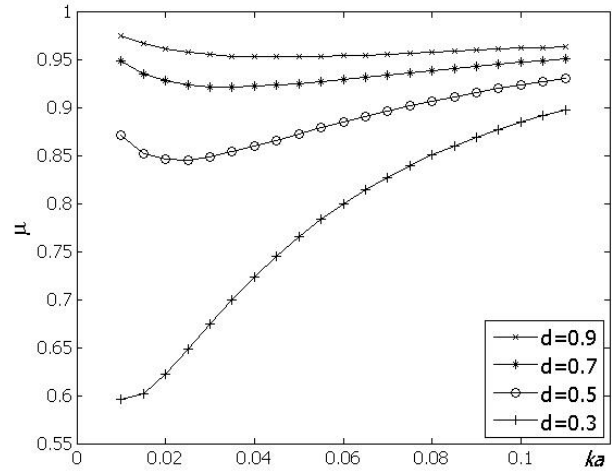


Рис. 3. Значення магнітної проникності  $\mu$  при оптимальних параметрах області  $D$

Наступним параметром, який впливає на характер поведінки  $\mu$ , є значення функції  $h(x)$ . Результати, наведені на рис. 4, показують, що отримані значення  $\mu$  при малих  $|\text{Im} h(x)|$  є ближчі до  $\mu_0 = 1$ , а різниця між  $\mu$  і  $\mu_0$  зростає із зростанням  $|\text{Im} h(x)|$ . Збіжність розв'язку системи (24) залежить від  $h(x)$  значною мірою і має характер, аналогічний до результатів, наведених на рис. 2.

Слід зауважити, що із зміною параметра  $a$  і функції  $h(x)$  змінюється також амплітуда розсіяного поля для векторів  $E$  і  $H$ . Числові результати показують, що амплітуда зростає із збільшенням радіуса  $a$  включень. Повертаючись до результатів рис. 1, можна зробити висновок, що амплітуда зростає одночасно зі збільшенням  $a$  і відхиленням отриманого  $\mu$  від початкового значення  $\mu_0$ . Залежність амплітуди  $E_x$  розсіяного поля від параметра  $ka$  показано на рис. 5.

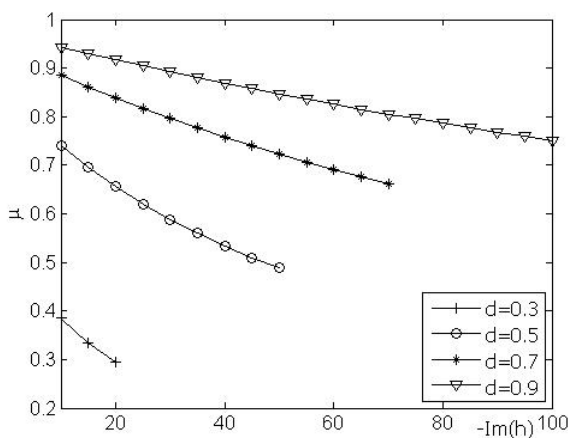


Рис. 4. Залежність модуля проникності  $\mu$  від  $|\text{Im} h(x)|$

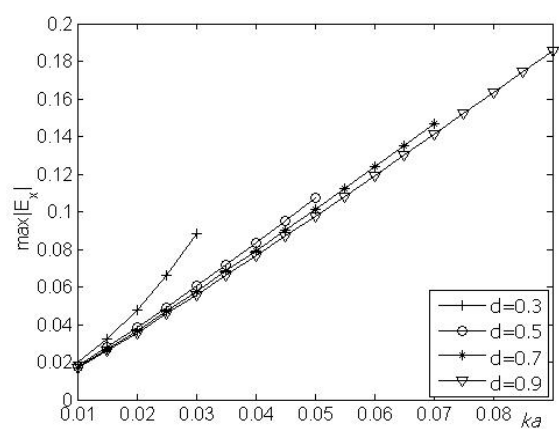


Рис. 5. Амплітуда компоненти  $E_x$  розсіяного поля при різних віддальх  $d$  між включеннями

Запропонований підхід дає можливість створювати середовища із кусково-постійним розподілом  $\mu$ . Такий розподіл може бути реалізований як включенням різної кількості  $M_p$  тіл малого радіуса  $a$  в підобласті  $\Delta_p$ , так і зміною функції  $h(x_m)$  у цих підобластях. Кожен із цих способів має переваги залежно від фізичних і геометричних параметрів області  $D$ . У практичних застосуваннях становить інтерес створення постійного розподілу  $\mu$  вздовж певного напрямку (наприклад, по осі  $x$ ) і кусково-постійних вздовж осей  $y$  та  $z$ . На рис. 6 показано такий розподіл  $\mu$ , реалізований включенням різної кількості включень  $M_p$  у три підобласті  $\Delta_p$  області  $D$  з кількостями включень  $M_1 = 9 \times 5 \times 5$ ,  $M_2 = 7 \times 5 \times 5$ , і  $M_3 = 5 \times 5 \times 5$ . Цим розподілом включень можна досягти різниці у розподілі  $\mu$  за окремими підобластями у межах 2.5%. З метою збільшення різниці у значеннях  $\mu_p$  для різних  $\Delta_p$  необхідно збільшувати відхилення у числах  $M_p$ . Отримані так розподіли проникності  $\mu_p$  дають змогу формувати відмінні розподіли компонент  $E_x$  і  $E_y$  розсіяного електричного поля.

На рис. 7. показано розподіл проникності  $\mu$ , створений шляхом задавання різних значень функції  $h(x_m)$  у чотирьох підобластях  $\Delta_p$  області  $D$ . Кількість включень у всіх підобластях однакова:  $M_p = 11 \times 5 \times 5$ , а значення функції  $h(x_m)$  наступні  $h_1 = -7i$ ,  $h_2 = -9i$ ,  $h_3 = -11i$ ,  $h_4 = -13i$  (тобто,  $h(x_m)$  – кусково-постійна).

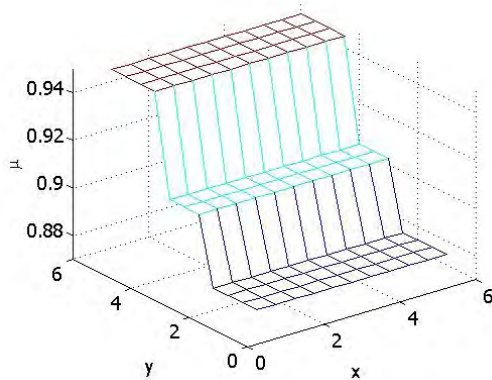


Рис. 6. Кусково-постійний розподіл  $\mu$  для трьох різних значень  $M_p$

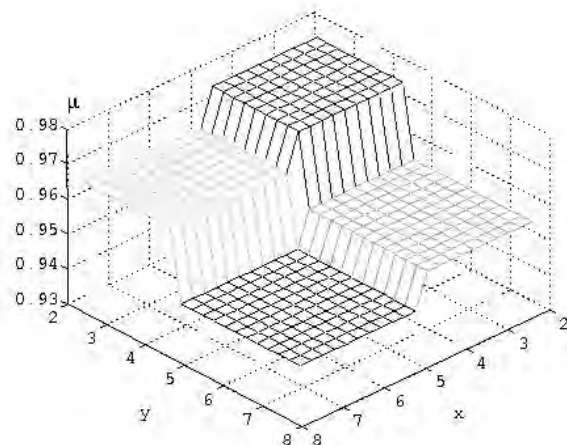


Рис. 7. Кусково-постійний розподіл  $\mu(x)$  для різних  $h(x)$  у окремих підобластях  $\Delta_p$

## Висновки

Розроблено обчислювальні процедури для формування середовищ із неоднорідною магнітною проникністю  $\mu(x)$ . Числові результати підтверджують теоретичний висновок про можливість створення середовищ із кусково-постійними значеннями  $\mu(x)$ . Формування таких значень  $\mu(x)$  відбувається за рахунок зміни функції  $h(x)$ , яка описує поверхневий імпеданс включень, або за рахунок розміщення у підобластях  $\Delta_p$  області  $D$  різної кількості тіл  $M_p$  малого радіуса  $a$ .

1. Andriychuk M. I. and Ramm A. G. Scattering by many small particles and creating materials with a desired refraction coefficient, *Int. J. Computing Science and Mathematics*. Vol. 3, № 1/2, pp. 102–121, January 2010. 2. Cioranescu D., Donate P. An introduction to homogenization, Oxford Univ. Press, New York, 1999. 3. Marchenko V., Khruslov E. Homogenization of partial differential equations, Birkhauser, Boston, 2006. 4. Muller C. Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves, Springer-Verlag, Berlin, 1969. 5. Ramm A. G. Many-body wave scattering by small bodies and applications, *J. Math. Phys.*, 48, N 10, (2007). 6. Ramm A. G. Wave scattering by many small particles embedded in a medium, *Phys. Lett. A*, 372/17, (2008), pp. 3064-3070. 7. Ramm A. G. Electromagnetic wave scattering by many small particles and creating materials with a desired permeability, *Progress in Electromagnetic Research, M (PIER M)*, 14, (2010), pp. 193–206.