

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ЗОВНІШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМІВНИЙ СТАН ДЕРЕВИНИ У ПРОЦЕСІ СУШІННЯ

© Крошній І., Соколовський Я., 2011

Наведено закономірності розвитку напружено-деформівного стану капілярно-пористих матеріалів зі змінними тепломеханічними властивостями у процесі сушіння залежно від характеристик зовнішнього середовища. На основі числового експерименту досліджено вплив параметрів агента сушіння на динаміку розвитку напружень у деревині.

Ключові слова: моделювання, напруження, процес сушіння, капілярно-пористий матеріал.

In this article patterns of development of tension-deformed state of canillary-porous materials with variable heat-mechanic characteristics in the process of drying, depending on the characteristics of the environment, were resulted. The influence of the parameters of drying agent on the dynamics of stress in the wood was investigated on the basis of numerical experiment.

Keywords: design, tension, process of drying, canillary-porous material.

Актуальність досліджень

Розроблення нових та удосконалення існуючих технологій сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, гостро ставить питання розроблення математичних моделей деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів. Адже значні за величиною значення напружень є основним стримульовальним фактором інтенсифікації процесу сушіння деревини і визначальним критерієм кінцевої якості продукції. Тому розроблення математичних моделей, які б пов'язували технологічні параметри процесу сушіння з розвитком напружено-деформівного стану у деревині з врахуванням в'язкопружних властивостей є актуальним завданням.

Аналіз наявних результатів

Сьогодні побудовано одновимірні математичні моделі деформування деревини з врахуванням реологічної поведінки [1–3]. Із застосуванням числових методів досліджено двовимірні математичні моделі ізотермічного та неізотермічного вологоперенесення і напружено-деформівного стану деревини у процесі сушіння з врахуванням в'язкопружної поведінки деревини та анізотропії змінних тепломеханічних характеристик [4–6]. Однак до сьогодні недостатньо висвітлені питання встановлення закономірностей напружено-деформівного стану деревини від зміни параметрів зовнішнього середовища (агента сушіння). У працях [7, 8] наведено емпіричні залежності відносної вологості та температури середовища залежно від зміни напружень у деревині з врахуванням пружних властивостей.

Моделювання напружено-деформівного стану деревини у лінійній області деформування для змінних коефіцієнтів тепломасоперенесення

Оскільки деревина являє собою неоднорідний, анізотропний природний композит, який складається із високомолекулярних сполук і належить до класу фізично нелінійних реологічних матеріалів, а процес сушіння матеріалів обумовлений наявністю нестационарних температурно-вологісних полів і усадкових явищ, то важливим є вивчення взаємозв'язаних тепломасообмінних і релаксаційних процесів,

які, своєю чергою, формують розподіл вологісних та усадкових деформацій. Взаємозв'язок деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів спочатку розглянемо на моделі [9, 10]. Вихідними рівняннями, які у лінійному наближенні моделюють взаємозв'язок тепломасоперенесення і напруженого стану деревини з врахуванням їх реологічних властивостей, є балансові рівняння, рівняння руху. Рівняння стану запишемо у вигляді зв'язку між першими інваріантами тензорів напружень і деформацій, який є узагальненням закону Гука для в'язкопружних матеріалів

$$A\sigma_{ij} = B\left(\varepsilon_{ij} - \frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{kk}}{3}\right) + \delta_{ij}AK\left(\varepsilon_{kk} - \frac{dV}{V_\sigma}\right), \quad \frac{dV}{V_0} = \beta(x, \tau)(U(x, \tau) - U_0(x)), \quad (1)$$

де A, B – диференціальні оператори за часом, $K=K(U)$ – коефіцієнт об'ємного розширення, σ_{ij} і ε_{ij} – відповідно коефіцієнти тензорів напружень і деформацій, δ_{ij} – символ Крюнекера, $U(x, \tau)$, U_0 – відповідно вологовміст деревини у будь-який момент сушіння і початковий. Для конкретних типів операторів A і B отримаємо співвідношення між напруженнями і деформаціями для часткових випадків в'язкопружних деформацій. Зокрема, для вибраної моделі маємо

$$A = \tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau} + 1; \quad B = H \frac{\partial}{\partial \tau} + E, \quad (2)$$

де H – миттєвий модуль пружності, E – тривалий модуль пружності, τ_1 – час релаксації.

Отже, напружено-деформівний стан деревини у процесі сушіння із врахуванням взаємозв'язку деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів, згідно з (1) і (2), описується співвідношенням

$$n \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \tau} + \sigma_{ij} = \frac{\partial \left(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \right)}{\partial \tau} Hn + E \left(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \right) + \delta_{ij} K \left(n \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\varepsilon_{kk} - \frac{dV}{V_0} \right) + \varepsilon_{kk} - \frac{dV}{V_0} \right) \quad (3)$$

За гіпотезою тонких перерізів [11] розміри деревної пластини визначаються кривою розподілу вологовмісту, а всихання $l - l_0$ є пропорційними вологовмісту кожного шару, тобто

$$l - l_0 = \beta U(x, y) l_0, \quad (4)$$

де l_0 – лінійний розмір абсолютно сухого матеріалу, β – коефіцієнт лінійного всихання, l – лінійний розмір матеріалу.

За умови формостійкості пластини у процесі сушіння впливає, що зміна лінійних розмірів нескінченних шарів є однаковою і характеризується середнім вологовмістом $\bar{U}(\tau)$, тобто

$$l_{cp}(\tau) - l_0 = \beta \bar{U}(\tau) l_0 \quad (5)$$

Отже, недопустиме всихання дорівнює різниці між довжиною шару у вільному стані (пов'язаному із іншими шарами) і реальною довжиною

$$l(\tau) - l_{cp}(\tau) = l_0 \beta (U(x, \tau) - \bar{U}(\tau)). \quad (6)$$

Враховуючи (3), (6), отримаємо співвідношення для визначення напружено-деформівного стану деревної пластини із врахуванням пружних і в'язкопружних властивостей

$$\sigma(\tau) = \frac{H(W, \tau) + K(W, \tau)}{1 + \beta_0 U_0} \beta(x, \tau)(U(x, \tau) - \bar{U}(x, \tau)) - K(W, \tau) \beta(x, \tau)(U(x, \tau) - U_0(x, \tau)) - \frac{H(W, \tau) - E(W, \tau)}{\tau_1(1 + \beta_0 U_0)} \int_0^\tau e^{-\frac{\tau-\tau'}{\tau_1}} \beta(x, \tau)(U(x, \tau)) d\tau', \quad (7)$$

де β_0 – коефіцієнт лінійного всихання на початку процесу сушіння.

Процес сушіння деревини описується нестационарними рівняннями тепловологоперенесення [12], аналіз яких дає змогу визначити температурно-вологісне поле матеріалу протягом усього процесу.

Оскільки ці розв'язки отримуються у припущенні постійних значень коефіцієнтів тепломасоперенесення і термодинамічних характеристик, то для їх використання необхідно весь процес сушіння розділити на окремі інтервали ΔU і Δt . За отриманими закономірностями враховують наявні експериментальні дані щодо залежності теплофізичних і термодинамічних коефіцієнтів від температури і вологості.

Отже, деревинну пластину дискретизуємо на окремі підшари, а час – на окремі інтервали. Початковий стан i -го підшару у момент часу $\tau = \tau_j$ характеризується його границями $x_j^{(i-1)}$ і x_j^i , товщиною Δ_j^i , розподілом вологості $U(\tau_j, x) = U_j^{(i)}(x)$ і температури $t(\tau_j, x) = t_j^{(i)}(x)$. Товщина підшару дорівнює $\Delta_j^i = l_2/n'$ (n' – кількість підшарів). Вважається, що вологісні поля є однорідно-стаціонарними $U_j^{(i)}(x, y) = U_j^{(i)} = \text{const}$.

Для заданого початкового стану i -го підшару у момент часу τ_j температура визначається із рівняння

$$c_j^{(i)} \rho_j^i \frac{\partial t^{(i)}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_j^{(i)} \frac{\partial t^{(i)}}{\partial x} \right), \quad (8)$$

де $x^{i-1} \leq x \leq x_j^i$, а величини $c_j^{(i)}, \rho_j^{(i)}, \lambda_j^{(i)}$ – відповідно теплоємність, густина і вологопровідність, що визначаються для кожного підшару. Умови спряження записуються у вигляді:

$$t^{(i)}(x_j^{(i)}, \tau) = t^{(i-1)}(x_j^{(i)}, \tau);$$

$$\lambda_j^{(i)}(x_j, \tau) \frac{\partial t^{(i)}(x_j^{(i)}, \tau)}{\partial x} = \lambda_j^{(i-1)}(x_j^{(i)}, \tau) \frac{\partial t^{(i-1)}(x_j^{(i)}, \tau)}{\partial x}; \quad \tau_j \leq \lambda \leq \tau_{j+1}. \quad (9)$$

Квазілінійне рівняння (8) із відповідними граничними умовами і умовами спряження (9) розв'язано за ітераційним методом.

Приймають, що крива розподілу температури $t_{j+1/2}^{(i)}(x)$ для моментів часу $\tau_{j+1/2} = \tau_j + \Delta\tau/2$ дорівнює середній температурі за період часу (τ_j, τ_{j+1}) і усереднюється на $t_{j+1/2}^{-(i)} = \text{const}$ за допомогою методу трапецій

$$2t_{j+1/2}^{-(i)} = t_{j+1/2}^{(i)}(x_j^{(i-1)}) + t_{j+1/2}^{(i)}(x_j^{(i)}), i = \overline{1, n} \quad (10)$$

Отже, за товщиною деревної пластини розподіл температури апроксимується ступінчатою функцією

$$t(x) \approx \sum_{i=1}^n \delta(x) ((x - x_j^{(i-1)}) - (x - x_j^{(i)})) t_{j+1}^{(i)}, \quad (11)$$

де $\delta(x)$ – одинична функція Хевісайда.

Аналогічним шляхом для заданого початкового стану i -го підшару за температурою і деформаціями поля будується крива розподілу вологості у i -у шарі для моменту часу $\tau = \tau_{j+1}$. Враховуючи, що поле температури в i -у підшарі є однорідно-стаціонарним $t_j^{(i)}(x) = t_{j+1}^{(i)} = \text{const}$, розподіл вологісного поля у i -у підшарі за товщиною для моменту часу $\tau = \tau_{j+1}$ у стадії регулярного режиму процесу сушіння описується співвідношенням

$$U_{j+1}^{(i)}(x) = U_{0j}^{(i)} - (U_{0j}^{(i)} - U_p) \left\{ 1.29 \sqrt{Fo_{j+1}^{(i)}} \exp \left(- \left(1 - \frac{x}{l_2} \right)^2 / 4 Fo_{j+1}^{(i)} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\left(1.29 \sqrt{Fo_{j+1}^{(i)}} + 1 - \frac{x}{l_2} \right)^{-1} - \left(1.29 \sqrt{Fo_{j+1}^{(i)}} + 1 - \frac{x}{l_2} + 2 Bi_j^{(i)} Fo_{j+1}^{(i)} \right)^{-1} \right) \right\}, \quad (12)$$

де U_0 і U_p – початковий і рівноважний вологовміст матеріалу, Bi , Fo – критерії Біо і Фур'є.

Умови спряженості відносно розподілу вологи мають вигляд

$$U^{(i-1)}(x_j^{(i)}, \tau) = U^{(i)}(x_j^{(i)}, \tau). \quad (13)$$

Оскільки для рівняння (12) допускається постійність тепловологообмінних коефіцієнтів перенесення, то у границях кожного i -го підшару реальні коефіцієнти усереднюються. Отримана крива розподілу вологості за товщиною i -го підшару для $\tau = \tau_{j+1}$ усереднюються для $\bar{U}_{j+1}^{(1)} = \text{const}$ так

$$3\bar{U}_{j+1}^{(i)} = 2U_{j+1}^{(i)}(x_j^{(i-1)}) + U_{j+1}^{(i)}(x_j^{(i)}), i = \overline{1, n}. \quad (14)$$

Аналогічно (11), за товщиною деревної пластини вологісна крива апроксимується виразом

$$U(x) \approx \sum \delta(x)((x - x_j^{(i+1)}) - (x - x_j^{(i)}))\bar{U}_{j+1}^i. \quad (15)$$

Для стадії регулярного режиму процесу сушіння деревини, який характеризується інтенсивним виділенням вологи у всьому перетині матеріалу, крива розподілу вологовмісту за товщиною пиломатеріалів близька до параболічної. Тому для визначення полів вологості в i -му підшарі для моменту часу $\tau = \tau_{j+1}$ розрахункові формули, які є аналогом співвідношень [13], отриманих на основі графоаналітичного методу, записується у вигляді

$$U_j^{(i)}(x) = U_{j+1}^i(x_j^{(0)}) - (x/l^2)^2 (U_{j+1}^{(i)}(x_j^{(0)}) - U_{j+1}^{(n)}(x_j^{(n)})), \quad x_{j+1}^{(i-1)} \leq x \leq x_{j+1}^{(i)}. \quad (16)$$

Усереднена крива описується (14), а середня вологість у шарі дорівнює

$$3\bar{U}_{j+1} = 2\bar{U}_{j+1}^{(1)} + U_{j+1}^n \quad (17)$$

$$\text{де } U_{j+1}^{(i)} = (U_j^{(1)} - U_{j+1}^1) \exp\left(-\frac{3Bi_{j+1}^{(1)} Fo_{j+1}^{(1)}}{3 + Bi_{j+1}^{(1)}}\right) + U_{pj+1}^{(1)}; \quad U_j^{(n)} = \frac{U_{j+1}^{(n)} - U_{pj+1}^{(n)}}{1 + 0.5Bi_{j+1}^{(n)}} + U_{pj+1}^{(n)}.$$

Оскільки для стандартних режимів процесу сушіння деревини перший ступінь містить повністю стадію нерегулярного режиму і частину регулярного, то розраховують поля вологовмісту пиломатеріалів для багаступінчатих режимів на основі співвідношення, яке є аналогом формули [8] для визначення вологісного поля k -го ступеня процесу

$$U_{j+1}^{(k)(i)}(x) = (U_{y0+1}^{(k-1)(i)} - U_{pj+1}^{(i)}) \left(1 - \left(\frac{x}{l_2}\right)^2 \frac{Bi_{j+1}^{(k)(i)}}{Bi_{j+1}^{(k)(i)}}\right) \exp\left(-\frac{3Bi_{j+1}^{(k)(i)} Fo_{j+1}^{(k)(i)}}{3 + Bi_{j+1}^{(k)(i)}}\right) + U_{pj+1}^{(k)(i)}. \quad (18)$$

Так визначено усі складові для знаходження напружено-деформівного стану деревини у процесі сушіння за співвідношенням (7). Формули для знаходження вологісних і залишкових напружень згідно з (7) мають вигляд:

$$\sigma_B(\tau) = \frac{H(U_{j+1}^{(i)}, \tau) + K(U_{j+1}^{(i)}, \tau)}{1 + \beta_0 U_0} \beta(x_{j+1}^{(i)}, \tau)(U_{j+1}^{(i)} - \bar{U}_{j+1}^i) - K(U_{j+1}^{(i)}, \tau) \beta(x_{j+1}^{(i)}, \tau)(U_{j+1}^{(i)} - U_{j+1}^{(n)})$$

$$\sigma_3(\tau) = \frac{H(U_{j+1}^{(i)}, \tau) - E(U_{j+1}^{(i)}, \tau)}{n(1 + \beta_0 U_0)} \int_0^\tau e^{-\frac{\tau-\tau'}{n}} \beta(x_{j+1}^{(i)}, \tau)(U_{j+1}^{(i)} - \bar{U}_{j+1}^i) d\tau' \quad (19)$$

Моделювання вологісних і залишкових напружень з врахуванням нелінійного закону деформування деревини

Для розрахунку напружено-деформівного стану деревини із врахуванням в'язкопружних властивостей матеріалу використовуємо узагальнене реологічне рівняння в інтегральній формі. Враховуючи (6), знаходимо значення $\partial \varepsilon / \partial \tau$, обумовлене наявністю усадкових деформацій у припущенні незалежності коефіцієнта лінійного всихання від часу

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = \beta(x) \left(\frac{\partial U(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial \bar{U}(\tau)}{d\tau} \right) = \beta(x) K(U, \bar{U}, x, \tau). \quad (20)$$

Підставляючи (20) у (3), отримаємо формулу для визначення напружено-деформівного стану деревини у процесі сушіння

$$\sigma = K\beta(x) \left(U(x, \tau) - U(\tau) + G(U, \tau) \int_0^{\tau} K(U, \bar{U}, x, \tau) \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{\tau_1}\right) d\tau_0 + \right. \\ \left. + G_2 \int_0^{\tau} K(U, \bar{U}, x, \tau) \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{\tau_1}\right) d\tau_0 \right); \quad G_i(U, t) = \frac{(\tau_i - \chi_1)(\tau_i - \chi_2)}{\tau_i(\tau_1 - \tau_2)} \quad (21)$$

Часи релаксацій напружень τ_1, τ_2 і часи релаксацій деформацій χ_1, χ_2 реологічної моделі описуються співвідношенням [4].

Для періоду нерегулярного режиму процесу сушіння розв'язок рівнянь неізотермічного масоперенесення згідно з [13] має вигляд:

$$T(X, Fo) = 1 - \varepsilon Ko \bar{K}_1 - \frac{1}{2} \varepsilon Ko Lu Ki_m \left(1 - X^2 + \frac{2}{Bi_q} \right) - \sum_{n=1}^2 \sum_{i=1}^2 C_{ni} \cos v_i \mu_n X \exp(-\mu_n^2 Fo); \\ E(X, Fo) = Ki \left[Lu Fo - \frac{1}{2} (1 + \varepsilon Ko Pn Lu) \left(\frac{1}{3} - X^2 \right) \right] + \\ + \frac{1}{\varepsilon Ko} \sum_{n=1}^2 \sum_{i=1}^2 C_{ni} (1 - v_i^2) \cos v_i \mu_n X \exp(-\mu_n^2 Fo), \quad (22)$$

де $T = \frac{t - t_0}{t_c - t_0}$; $E = \frac{U_0 - U}{U_0 - U_p}$; $X = \frac{x}{l}$. Значення коренів характеристичного рівняння μ_n і коефіцієнтів C_m наведено у [13]. Через Ko , Lu , Ki , Pn позначено критерії Косовича, Ликова, Кіріпчова і Поснова; ε – критерій фазового переходу.

Використовуючи співвідношення (22), знаходимо значення величини

$$U(X, \tau) - \bar{U}(\tau) = \left[\frac{1}{2} Ki_m (1 + \varepsilon Ko Pn Lu) \left(\frac{1}{3} - X^2 \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\varepsilon Ko} \sum_{i=1}^2 C_{ni} (1 - v_i^2) \left(\cos(v_i \eta_n X) - \frac{\sin v_i \mu_n}{v_i \mu_n} \right) \exp(-\mu_n^2 Fo) \right] (U_0 - U_p) \quad (23)$$

Вираз для $K(U, \bar{U}, X, \tau)$ для визначення напружено-деформівного стану знаходимо на основі (22), (23).

Тобто у періоді нерегулярного режиму процесу сушіння за сталої швидкості сушіння вологісні і залишкові напруження описуються наступними формулами:

$$\sigma_B(x, \tau) = K_p(x) \left(\frac{1}{2} Ki_m (1 + \varepsilon Ko Pn Lu) \left(\frac{1}{3} - x^2 \right) - \frac{1}{\varepsilon Ko} \sum_{n=1}^2 \sum_{i=1}^2 C_{ni} (1 - V_i^2) (\cos V_i \mu_n x) - \right. \\ \left. - \frac{\sin V_i \mu_n}{V_i \mu_n} \right) \exp(-\mu_n^2 Fo) (U_0 - U_p); \quad (24)$$

$$\sigma_s(x, \tau) = K_\beta(x) \int_0^{\tau} K(U, \bar{U}, X, \tau) \left(G_1(U, t) \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{\tau_1}\right) + G_2(U, t) \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{\tau_1}\right) \right) d\tau.$$

Період регулярного режиму процесу сушіння

Оскільки стадія регулярного режиму процесу сушіння характеризується випаровуванням вологи у будь-якій точці матеріалу, то криві розподілу вологовмісту за товщиною пиломатеріалів є близькими до параболічного, настання якого визначається умовою $Fo = 0.1$.

Безрозмірні потенціали перенесення для значень критерію Фур'є $1.0 \div 2.5$ визначається такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} T(X, Fo) &= 1 - \varepsilon Ko K_1 - \frac{1}{2} \varepsilon Ko Lu Ki_m \left(1 - X^2 + \frac{2}{Bi_q} \right); \\ E(X, Fo) &= Ki_m \left(Fo Lu - \frac{1}{2} (1 + \varepsilon Ko Pn Lu) \left(\frac{1}{3} - X^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Середні безрозмірні потенціали тепломасоперенесення (25) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{T}(X, Fo) &= 1 - \varepsilon Ko \bar{K}_1 - \frac{1}{2} \varepsilon Ko Lu Ki_m \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{Bi} \right); \\ \bar{E}(X, Fo) &= Ki_m Lu Fo. \end{aligned} \quad (26)$$

Напружено-деформівний стан для регулярного режиму процесу сушіння на основі (21), (25), (26) описується формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_B(X, \tau) &= \frac{1}{2} K \beta(x) Ki_m (1 + \varepsilon Ko Pn Lu) \left(\frac{1}{3} - X^2 \right); \\ \sigma_s(X, \tau) &= K_1 \beta(x) \int_0^\tau \frac{1}{2} Ki_m (1 + \varepsilon Ko Pn Lu) \left(X^2 - \frac{1}{3} \right) \times \\ &\times \left(G_1(U, t) \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{\tau_1}\right) + (G_2(U, t) \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{\tau_1}\right)) \right) d\tau_0. \end{aligned} \quad (27)$$

Розрахунок вологісних і залишкових напружень для змінних коефіцієнтів тепломасоперенесення

Наведено розрахунок напружено-деформівного стану деревини на основі спрощених розв'язків коефіцієнтів рівнянь тепломасоперенесення [13]. Перевагою такого підходу є врахування змінних значень коефіцієнтів тепломасоперенесення. Допускаючи, що розподіл температурно-вологісного поля для періоду спадної швидкості сушіння є параболічним, можна отримати такі співвідношення для перепадів вологовмісту і температури [13]

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{2} (U_0 - U_p) Ki_m (1 + Pn Ko Lu (\varepsilon + Rb)); \\ \Delta t &= \frac{1}{2} (t_c - t_0) Ki_m Ko Lu (\varepsilon + Rb), \end{aligned} \quad (28)$$

де Rb – критерій Ребіндера.

За параболічним законом розподілу гігроскопічної вологи у пиломатеріалах можна визначити локальну гігроскопічну вологість, знаючи величину вологості у центрі і на поверхні, а також інтегральну вологість матеріалу за формулою

$$U = U_{II} - \frac{3}{2} X^2 (\bar{U} - U_{II}). \quad (29)$$

Оскільки $U = U_{II} - \left(\frac{1}{3} \Delta U\right)$, то із врахуванням (28) і (29) поле вологовмісту у деревині для падаючої швидкості сушіння можна записати у вигляді

$$U = U_{II} - \frac{X^2}{2} (U_0 - U_p) Ki_m (1 + Pn Ko Lu (\varepsilon + Rb)). \quad (30)$$

Отже, напружено-деформівний стан деревини для періоду спадної швидкості сушіння згідно з (7), (30) описується співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\sigma_B(X, \tau) &= \frac{H(U, \tau) + K(U, \tau)}{1 + \beta_0 U_0} \left(\left(1 - \frac{X^2}{2} \right) - K(U, \tau) \frac{X^2}{2} \right) \beta(X, \tau) (U_0 - U_p) \times \\ &\quad \times Ki_m (1 + PnKoLu(1 + Rb)) - K(U, \tau) \beta(X, \tau) X \Delta U; \\ \sigma_3(X, \tau) &= - \frac{H(U, \tau) + K(U, \tau)}{\tau_1 (1 + \beta_0 U_0)} \left(1 - \frac{X^2}{2} \right) (U_0 - U_p) \int_0^\tau e^{-\frac{\tau - \tau'}{\tau_1}} \beta(X, \tau) \times \\ &\quad \times Ki_m (1 + PnKoLu(1 + Rb)) d\tau'.\end{aligned}\quad (31)$$

Моделювання напружень для випадку косинусоїдального розподілу вологовмісту

Розподіл вологовмісту за товщиною пиломатеріалів твердих листяних порід у процесі сушіння і достатньою точністю для практичних розрахунків описується косинусоїдальним законом [14]

$$U = U_{II} + (U_{II} - U_{II}) \cos \frac{\pi}{2} X. \quad (32)$$

Розподіл локального вологовмісту для будь-якого моменту часу визначається співвідношеннями

$$U(X, Fo) = (U_0 - U_p) \exp \left(- \frac{\pi^2 Bi Fo}{4Bi + \pi^2} \right) \cdot \frac{4Bi \cdot \cos \frac{\pi}{2} X + \pi^2}{4Bi + \pi^2} + U_p. \quad (33)$$

Формули для знаходження вологісних напружень у пиломатеріалах твердих листяних порід на стадії спадної швидкості сушіння згідно з (7), (32), (33) мають вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma_B(X, Fo) &= 4 \frac{H(U, \tau) + K(U, \tau)}{1 + \beta_0 U_0} \beta(X, Fo) (U_0 - U_p) \frac{Bi \cos \frac{\pi}{2} X - \frac{2Bi}{\pi}}{4Bi + \pi^2} \exp \left(- \frac{\pi Bi Fo}{4Bi + \pi^2} \right); \\ \sigma_3(X, Fo) &= 4 \frac{E(U, \tau) - H(U, \tau)}{\tau_1 (1 + \beta_0 U_0)} (U_0 - U_p) \frac{Bi \left(\cos \frac{\pi}{2} X - \frac{1}{\pi} \right)}{4Bi + \pi^2} \times \\ &\quad \times \int_0^\tau \beta(X, Fo) \exp \left(- \left(\frac{\tau - \tau'}{\tau_1} + \frac{\pi Bi Fo}{4Bi + \pi^2} \right) \right) d\tau'\end{aligned}\quad (34)$$

Для випадку, коли коефіцієнт лінійного всихання $\beta(X, Fo)$ є не залежить від тривалості сушіння, то залишкова складова напружено-деформівного стану дорівнює

$$\begin{aligned}\sigma_3(X, Fo) &= 4 \frac{E(U, \tau) - H(U, \tau)}{\tau_1 (1 + \beta_0 U_0)} (U_0 - U_p) \beta(X) \times \\ &\quad \times Bi \frac{\cos \frac{\pi}{2} X - \frac{1}{\pi}}{4Bi + \pi^2 + \tau_1 \pi^2 Bi Fo} \exp \left(\frac{4Bi + \pi^2 + \tau_1 \pi^2 Bi Fo}{\tau_1 (4Bi + \pi^2)} \right) \times \exp \left(\frac{-\tau}{\tau_1} \right).\end{aligned}\quad (35)$$

Моделювання зв'язку характеристик зовнішнього середовища (відносної вологості агента сушіння ϕ і температури t_c) з величинами напружено-деформівного стану матеріалу

Для цього використаємо співвідношення [15, 16] для визначення коефіцієнтів внутрішнього масоперенесення у гігроскопічних матеріалах на основі двопараметричних рівнянь стану. Зокрема, двофазний потік масоперенесення у вологих матеріалах описується виразом:

$$J_u = \lambda_{u\phi} (\nabla \phi + \delta_\phi + \nabla T), \quad (36)$$

де $\lambda_{u\phi} = \lambda_{u\phi}^p + \lambda_{u\phi}^n$ – коефіцієнт масопровідності; $\lambda_{u\phi}^p$, $\lambda_{u\phi}^n$ – коефіцієнти масопровідності у рідкій і повітряних фазах, δ_ϕ – відносний коефіцієнт термомасопровідності.

Зазначимо, що у рівнянні (36) потенціалом масоперенесення є величина відносної вологості повітря φ , рівноважного з гігроскопічним матеріалом, який характеризується вологовмістом U і температурою T . Зв'язок між цими параметрами визначається двопараметричними рівняннями стану $\varphi = f(U, T)$. З іншого боку, експериментально визначити коефіцієнти $\lambda_{u\varphi}^p$, $\lambda_{u\varphi}^n$ вкрай важко. Тому для їх визначення скористаємось підходом [16]. Отримано формули для визначення величини коефіцієнта масоперенесення

$$\lambda_{v\varphi} = \frac{\rho_0}{1 + \beta U} \left(\frac{H_{0s}^2 U_{0s} R_{II} T}{12 \rho v_s} \psi'(H_0) - \frac{\rho_{II} D}{\rho_p \rho_T} (\rho_p + \rho_T U) \right) + \rho_{II} D, \quad (37)$$

де ρ_0 , ρ_T , ρ_p , ρ_{II} – густини сухої маси, твердої (деревної речовини), рідкої і повітряної фаз, v_s – в'язкість рідкої фази, D – коефіцієнт взаємної дифузії пароповітряної суміші; індекс “os” відносить величини H , U до максимального гігроскопічного вологовмісту матеріалу для температури 273 К; R_{II} – газова стала пари, $\psi(H_0)$ – інтегральна функція потоку рідини, $H_0 = H/H_{0s}$ – приведена ширина еквівалентної пори. Функція $\psi(H_0)$ визначається залежністю

$$\psi(H_0) = \int_0^{H_0} H_0^2 \frac{v_s}{v_{kan}} \frac{dW}{dH_0} dH_0,$$

де v_{kan}/v_s – відносна в'язкість капілярної рідини, dW/dH_0 – диференціальний розподіл пор за їх розмірами, який визначається з рівнянь стану в'язкого матеріалу. Зокрема, для $T=293K$ можна отримати

$$\psi(H/H_{0s}) = 1,16\varphi^3 + 0,002\varphi^2 T - 1,88\varphi^2 + 0,177\varphi + 0,02T + 0,084\varphi T - 1,09.$$

Враховуючи вищевикладені співвідношення та отримані математичні моделі визначення напружено-деформівного стану гігроскопічних матеріалів у процесі сушіння, можна отримати закономірності зв'язку величин напружень з параметрами зовнішнього і внутрішнього тепло-масоперенесення. Ці закономірності мають нелінійний характер, тому їх досліджували числовими методами. Але для деяких випадків можна отримати такі співвідношення. Зокрема для косинусоїдального розподілу вологовмісту (33) у періоді спадної швидкості сушіння з врахуванням співвідношень (34), (35) встановлено залежності величини φ

$$\begin{aligned} \varphi = 0,018 * \frac{H_{0s}^2 H_0^{4,8} U_{0s} t}{v_s (1 - 3,1 \ln t / t_0)} \times \\ \times \left(\frac{\lambda_{u\varphi}}{\rho_0} \left(\frac{\sigma_B(X, F_0)(1 + \beta_0 U_0)(U_{II} + (U_{II} - U_{II}) \cos X\pi/2)}{4(U_0 - U_p)(H(U, t) + K(U, t)) \frac{Bi \cos X\pi/2 - 2Bi/\pi}{4Bi + \pi^2} \exp\left(-\frac{4BiFo}{4Bi + \pi^2}\right)} + 1 \right) - \right. \\ \left. - \rho_s \frac{\alpha_u}{Nu_u} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_T} (U_{II} + (U_{II} - U_{II}) \cos X\pi/2) \right)^{-1} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Для змінних коефіцієнтів тепломасоперенесення у випадку регулярного процесу сушіння напружено-деформівний стан описується співвідношеннями (31). У цьому випадку залежність між величиною φ і допустимими величинами напружень має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} = \frac{12V_s(1 - 3,1 \ln(T/T_0))\sigma(X, Fo)}{7,6 \cdot 10^{-5} H_0^{4,8} V_{0s} R_{II} T \rho_0} \left(\frac{H(U, T) + K(U, T)}{1 + \beta_0 U_0} \left(1 - \frac{1}{2} X^2 - K(U, T) \frac{X^2}{2} \right) \times \right. \\ \times \frac{t_e - \bar{t}}{KoLut_c (1/3\epsilon + Bi_q^{-1})} (1 + PnKoLu(1 + Rb)) \int_0^{\tau} \frac{E(U, T) E_T(U, T)}{H(U, T) \tau_{pen}(U, T)} \exp\left(-\frac{\tau - \tau_{pen}}{\tau_{pen}}\right) d\tau \Big)^{-1} - \\ - \frac{\rho_0 \alpha_u l}{\lambda_u \varphi Nu} \rho_s \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_T} - \frac{U}{U_p} \right) + 1. \end{aligned} \quad (39)$$

Числовий експеримент

Числові дослідження напружено-деформівного стану проведені для пиломатеріалів деревини сосни ($\rho_{\text{умовна}} = 400 \text{ кг/м}^3$) з перерізом $25 \times 50 \text{ мм}$ і початковою вологістю $W_0 = 30\%$. Для розрахунків використані апроксимаційні залежності теплофізичних і механічних характеристик деревини [12]. Реологічні характеристики ядер повзучості розраховано за співвідношенням [17]. Процес сушіння починається із ступеня, для якого температура агента сушіння $T = 61^\circ \text{C}$; відносна вологість $\varphi = 0,62$; різниця температур між агентом і матеріалом $\Delta T = 8^\circ \text{C}$; швидкість циркуляції агента $v = 1,5 \dots 2 \text{ м/с}$. За досягненням матеріалом вологості $W = 20\%$ параметрами наступного ступеня повинні бути: $T = 77^\circ \text{C}$, $\varphi = 0,31$, $\Delta t = 24^\circ \text{C}$. Розглянемо для такого двоступеневого режиму сушіння вплив температури середовища на розвиток напружень у деревині, змінивши температуру на $\pm 10^\circ \text{C}$ для кожного ступеня та не змінюючи інших параметри технологічного процесу згідно з нормативними документами. На початку процесу сушіння для вказаних вище температурних режимів відмінність буде незначна (рис. 1), але не стільки за максимальною величиною напружень, як за швидкістю їх зростання.

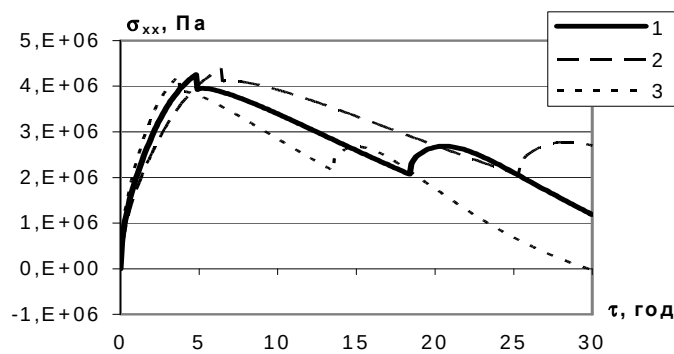


Рис. 1. Вплив температури агента сушіння в центрі пиломатеріалу деревини сосни розміром $25 \times 50 \text{ мм}$ на динаміку напружень σ_{xx} , де: 1 – температура за нормативними документами; 2 – знижена температура на 10°C ; 3 – підвищена температура на 10°C

У регулярному періоді осушення деревини підвищений температурний режим спричиняє як швидше видалення води, так і швидше зменшення напружень (рис. 1 залежність 3). Зниження ж температури (рис. 1, залежність 2) збільшує час технологічного сушіння.

Для дослідження впливу відносної вологості агента сушіння на напружено-деформівний стан висушуваної деревини змодельовано зазначений вище двоступеневий технологічний режим сушіння пиломатеріалів деревини сосни розміром $25 \times 50 \text{ мм}$, змінивши відносну вологість агента сушіння на $\pm 10\%$ для кожного ступеня та залишивши інші параметри технологічного процесу згідно з нормативними документами.

Динаміка напружень на початку процесу сушіння для різних значень відносної вологості агента сушіння буде відрізнятися за величиною напружень так: за зменшеної відносної вологості до $\varphi = 0,52$ відносно технологічного режиму за нормативними документами величина максимальних напружень на поверхні σ_{xx} зросте від $-3,2 \text{ МПа}$ до $-3,7 \text{ МПа}$ (рис.2).

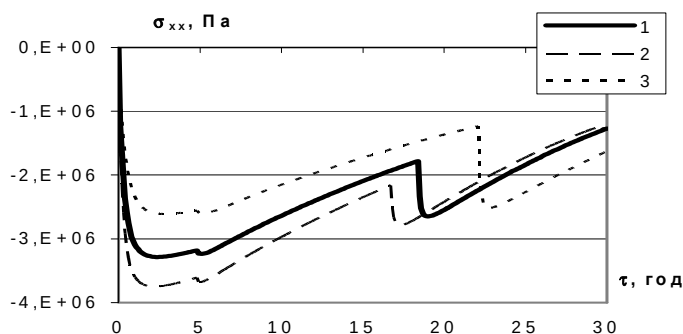


Рис. 2. Вплив відносної вологості агента сушіння на динаміку напружень σ_{xx} на поверхні при $x = a/2$ пиломатеріалу деревини сосни розміром $25 \times 50 \text{ мм}$, де: 1 – відносна вологість за нормативними документами; 2 – знижена відносна вологість на 10% ; 3 – підвищена відносна вологість на 10%

За збільшеної відносної вологості до $\varphi = 0,72$ відносно технологічного режиму за нормативними документами для $\varphi = 0,62$, що становить приблизно 16%, на поверхні пиломатеріалу величина максимальних напружень σ_{xx} зменшиться від -3,2 МПа до -2,6 МПа (рис. 2). У центрі пиломатеріалу за згаданої вище зміни відносної вологості напруження також будуть меншими: від 4,2 МПа до 3,4 МПа.

Висновок

На основі синтезу математичної моделі напружено-деформівного стану висушуваної деревини з параметрами зовнішнього внутрішнього процесів тепломасоперенесення встановлені закономірності, які дають змогу визначити значення параметрів агента сушіння деревини залежно від розподілів вологості у матеріалі і допустимих значень напружень. На основі результатів числового експерименту досліджено вплив температури середовища й відносної вологості на компоненти напружено-деформівного стану деревини сосни у процесі сушіння.

1. Уголев Б.Н. Деформативность древесины и напряжения при сушке. – М.: Лесная промышленность, 1971. – 174 с.
2. Соколовський Я.І. Технологічні напруження і деформації деревини у процесі сушіння // Науковий вісник: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 1999. – Вип. 9.3. – С. 168–176.
3. Соколовський Я.І., Поберейко Б.П. Расчет нестационарных напряжений в древесине при воздействии влаги // Лесной журнал: Изв. ВУЗов России. – 2000. – № 1. – С. 99–105.
4. Соколовський Я.І., Дендюк М.В. Математичне моделювання двовимірного в'язкопружного стану деревини у процесі сушіння // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2008. – Вип. 7. – С. 17–26.
5. Соколовський Я.І. Моделювання деформаційно-релаксаційних процесів у висушуваній деревині методом скінченних елементів / Я.І. Соколовський, А.В. Бакалець // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка" : Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2006. – Вип. 565. – С. 51–57.
6. Соколовський Я.І. Моделювання та оптимізація технологічних режимів сушіння деревини / Я.І. Соколовський, А.В. Бакалець // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка" : Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2008. – Вип. 629. С. 105–111.
7. Svensson S. Hygro-Mechanical Model For Wood Drying. From material model fo applicable tool // 67h International IUFRO Wood Drying Conference. – 2000. – P. 187–193.
8. Серговский П.С., Уголев Б.Н., Скуратов Н.В. Об оптимизации режимов сушки пиломатериалов на основе анализа внутренних напряжений // Научные труды МЛТИ. – М., 1980. – Вып. 124.
9. Соколовський Я.І. Взаємозв'язок деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів у капілярно-пористих тілах // Доповіді НАН України, сер. Механіка. – 1998. – № 9. – С. 76–80.
10. Соколовський Я.І. Взаимосвязь деформативно-релаксационных и тепломасообменных процессов при сушке капілярно-пористых тел // Прикладная механика. – 1988. – 34 № 9. – С. 100–107.
11. Кравчук А.С., Майборода В.П., Урижумцев Ю.С. Механика полимерных и композитных материалов. – М., 1985. – 319 с.
12. Шубин Г.С. Сушка и тепловая обработка древесины. – М.: Лесная промышленность, 1990. – 236 с.
13. Лыков А.В. Теория сушки. – М., Энергия, 1968. – 472 с.
14. Биллей П.В. Сушка древесины твердых лиственных пород. – М.: Экология, 1992. – 322 с.
15. Загоруйко В.А. Соколовская А.В. Теория единого потенциала массопереноса // ДАН СССР. – 1986. – 28, № 1. – С. 154–158.
16. Загоруйко В.А., Кривошеев Ю.И., Слынько А.Г. Определение влагосодержания гигроскопических грузов для их сохранной перевозки. – М.: Трансибир, 1988. – 496 с.
17. Соколовський Я.І., Андрашек Й.В. Методика та результати експериментальних досліджень реологічної поведінки деревини // Науковий вісник: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 1999. – Вип. 9.13. – С. 15–26.