

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ДЕФОРМАЦІЙНО-РЕЛАКСАЦІЙНОГО СТАНУ В ДЕРЕВИНІ У ПРОЦЕСІ СУШІННЯ

© Соколовський Я., Бакалець А., Мокрицька О., 2011

Розроблено математичну модель неізотермічного вологоперенесення та в'язкопружного деформування деревини у процесі сушіння, яка враховує анізотропність та змінність тепломеханічних характеристик. Сформульовану математичну модель реалізовано методом скінченних елементів для в'язкопружного стану з врахуванням накопичення незворотних деформацій. Шляхом об'єктно-орієнтованого аналізу спроектовано та здійснено програмну реалізацію моделі у вигляді задокументованих класів. Сформульовано та розв'язано оптимізаційну задачу вибору режимних параметрів процесу сушіння з врахуванням обмежень на напруження.

Ключові слова: математична модель, метод скінченних елементів, деревина, сушіння, тепломасоперенесення, в'язкопружний стан, об'єктно-орієнтоване програмування.

The article develops a mathematical model of non-isothermal moisture transfer and viscoelastic deformation of wood during drying, which takes into account the anisotropy and variability of heat-mechanic characteristics. By finite element method was formulated by the implementation of mathematical models for viscoelasticity with regard to the accumulation of irreversible deformation. By object-oriented analysis is designed and implemented software implementation model in the form of documented classes. Formulated and solved optimization problems the choice of regime parameters of the drying process with regard to restrictions on the strain.

Key words: mathematical model, finite element method, wood, drying, heat mass transfer, viscoelasticity, object-oriented programming.

Вступ

Відомо, що гідротермічна обробка капілярно-пористих матеріалів супроводжується розвитком напружень. Вони є основним стримувальним фактором для інтенсифікації технологічних процесів сушіння матеріалів і визначальним критерієм якості. Значна кількість досліджень присвячена розробленню та реалізації математичних моделей розрахунку тепломасоперенесення та деформаційно-релаксаційних процесів у твердих матеріалах. Процеси, що відбуваються у деревині під час сушіння, характеризуються взаємозв'язаними анізотропними фізико-механічними властивостями і істотно залежать від густини, температури, вологовмісту та реологічної поведінки. Тому часто моделі, які є ефективними для інших матеріалів, не відображають складну картину неізотермічного вологоперенесення та в'язкопружного деформування деревини, зокрема не враховують анізотропію її змінних тепломеханічних властивостей, нехтують реологічною поведінкою.

Розроблення математичних моделей, які б пов'язували технологічні параметри процесу сушіння із розвитком напружень у деревині, враховуючи її змінні анізотропні температурно-вологісні та в'язкопружні властивості, залишається актуальним завданням. Такі моделі дадуть змогу запропонувати (шляхом вдосконалення існуючих або створенням нових) ефективніші, енергоощадні технології сушіння гігроскопічних капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини. Тому існує потреба розробки нових двовимірних математичних моделей, які б пов'язували технологічні параметри процесу сушіння з тепломасоперенесенням та в'язкопружним станом у

деревині. Врахування реологічної поведінки, анізотропії, мінливості тепломеханічних властивостей ускладнює математичні моделі і вимагає вдосконалення числових методів для їхнього розв'язування, адже аналітичні методи стають незастосовними.

Для моделювання напружено-деформівного стану деревини у процесі сушіння у працях [1–4] на основі диференційної форми закону Гука та числових методів отримано результати для одно- та двовимірних задач у пружній області деформування. У [5, 6] розроблені моделі визначення двовимірного вологісного і в'язкопружного станів у процесі сушіння деревини з врахуванням сталих вологісних і реологічних властивостей матеріалу.

Математична модель деформаційно-релаксаційних полів у процесі сушіння деревини з врахуванням анізотропії змінних тепломеханічних коефіцієнтів

Сформулюємо математичну модель визначення розподілу компонент вектора переміщень $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$, температури $T(\tau, \mathbf{x})$ та вологовмісту $U(\tau, \mathbf{x})$ під час сушіння дерев'яного бруса протягом часу $\tau \in [0, \tau_{кін}]$ в осесиметричній області поперечного перерізу $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1 \in [0, l_1], x_2 \in [0, l_2]\}$, центр якого суміжний з початком координат, а осі анізотропії збігаються з координатними осями (l_1, l_2 – геометричні розміри бруса). Для цього використані основні закони механіки спадкових середовищ [7].

Систему модельних рівнянь побудовано так. Компоненти вектора переміщень $\mathbf{u}$ задовольняють рівняння рівноваги:

$$\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (1)$$

з граничними умовами, які враховують симетричність області задачі Ω ,

$$u_i|_{x_i=0} = 0 \quad (2)$$

та граничними умовами, які враховують відсутність зовнішніх зусиль,

$$\sigma_{ii}|_{x_i=l_i} = 0, \quad (3)$$

де $\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$ – компоненти напружень, $\mathbf{B}$ – матриця виду: $\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}$.

Співвідношення Коші між переміщеннями та деформаціями $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})^T$ можна записати так

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u}. \quad (4)$$

Зв'язок між компонентами напружень та деформацій у деревині під час сушіння ґрунтується на законах усадки гігроскопічних матеріалів та інтегральних рівняннях спадкової теорії Больцмана–Вольтера і визначається формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(\tau) &= C_{11}(T, U) [\varepsilon_{11}(\tau) - \varepsilon_{U1}(\tau)] - C_{11}(T, U) \int_0^\tau R_{11}(\tau - s, T, U) [\varepsilon_{11}(s) - \varepsilon_{U1}(s)] ds + \\ &+ C_{12}(T, U) [\varepsilon_{22}(\tau) - \varepsilon_{U2}(\tau)] - C_{12}(T, U) \int_0^\tau R_{12}(\tau - s, T, U) [\varepsilon_{22}(s) - \varepsilon_{U2}(s)] ds; \\ \sigma_{22}(\tau) &= C_{21}(T, U) [\varepsilon_{11}(\tau) - \varepsilon_{U1}(\tau)] - C_{21}(T, U) \int_0^\tau R_{21}(\tau - s, T, U) [\varepsilon_{11}(s) - \varepsilon_{U1}(s)] ds + \\ &+ C_{22}(T, U) [\varepsilon_{22}(\tau) - \varepsilon_{U2}(\tau)] - C_{22}(T, U) \int_0^\tau R_{22}(\tau - s, T, U) [\varepsilon_{22}(s) - \varepsilon_{U2}(s)] ds; \\ \sigma_{12}(\tau) &= 2C_{33}(T, U) \varepsilon_{12}(\tau) - 2C_{33}(T, U) \int_0^\tau R_{33}(\tau - s, T, U) \varepsilon_{12}(s) ds, \end{aligned} \quad (5)$$

де $\varepsilon_U = (\varepsilon_{U1}, \varepsilon_{U2}, \varepsilon_{U3})^T$ – вектор компонент деформацій, які виникають внаслідок зміни температури та вологовмісту; C_{ij} – компоненти тензора пружності анізотропного тіла. Для плоского напружено-деформівного стану величини ε_{U1} , C_{ij} визначаються за формулами:

$$\varepsilon_U = \begin{bmatrix} \varepsilon_{U1} \\ \varepsilon_{U2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \Delta T + \beta_1 \Delta U \\ \alpha_2 \Delta T + \beta_2 \Delta U \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} & \frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_1\nu_2} & 0 \\ \frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_1\nu_2} & \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

де ΔT , ΔU – відповідно приріст температури та вологовмісту, $E_i(T, U)$ – модулі Юнга, $\nu_i(T, U)$ – коефіцієнти Пуассона, $\mu(T, U)$ – модуль зсуву.

Значною перевагою такої моделі є спосіб визначення ядер релаксації $R_{ij}(\tau-s, T, U)$, за допомогою яких моделюється реологічна поведінка деревини з врахуванням накопичення незворотних деформацій. Здійснено апроксимацію експериментальних даних [8] деформацій повзучості зразків деревини під навантаженням та після розвантаження в широкому діапазоні зміни температурно-вологісних умов у вигляді

$$\varepsilon^*(\tau) = \left[a_0 - \sum_{i=1}^M a_i \exp(-b_i \tau) \right] h(\tau) h(\tau_0 - \tau) - \left[\alpha_0 - \sum_{i=1}^M \alpha_i \exp(-\beta_i (\tau - \tau_0)) \right] h(\tau - \tau_0), \quad (6)$$

де $h(\tau)$ – функція Хевісайда, а невідомі коефіцієнти a_i , b_i , α_i , β_i визначено методом найменших квадратів. На підставі отриманих апроксимаційних залежностей визначені ядра повзучості. Шляхом пошуку резольвенти отримано співвідношення для визначення ядер релаксації $\mathbf{R}(\tau-s, T, U)$, що входять до формул (5).

Підставивши співвідношення (4) в формули (5), а потім в рівняння (1), отримаємо рівняння рівноваги, де роль додаткових об'ємних сил відіграватимуть градієнти температури та вмісту вологи. Сукупність рівнянь (1), (4), (5), (6) та граничних умов (2) і (3), а також початкової умови $u_i|_{\tau=0} = 0$, складають математичну модель в'язкопружного деформування деревини у процесі сушіння з врахуванням накопичення незворотних деформацій. Для її реалізації необхідно визначити розподіл температурно-вологісних полів висушуваної деревини, що входять у формули (5), у тензор пружних характеристик $\mathbf{C}$ та ядра релаксації $R_{ij}(\tau-s, T, U)$ матеріалу.

Математична модель неізотермічного вологоперенесення у процесі сушіння деревини

Для визначення розподілів температури $T(\tau, \mathbf{x})$ та вологовмісту $U(\tau, \mathbf{x})$ необхідно розв'язати задачу тепломасоперенесення, яка описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних:

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \varepsilon \rho_0 r \frac{\partial U}{\partial \tau}; \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_1 \delta \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_2 \delta \frac{\partial T}{\partial x_2} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

з початковими умовами:

$$T|_{\tau=0} = T_0(\mathbf{x}); \quad U|_{\tau=0} = U_0(\mathbf{x}), \quad (8)$$

та граничними умовами:

$$\begin{aligned} \lambda_i \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x_i=l_i} + \rho_0(1-\varepsilon)\beta_i(U|_{x_i=l_i} - U_p) &= \alpha_i(T_c - T|_{x_i=l_i}); \\ \left(a_i \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + a_i \delta \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_{x_i=l_i} &= \beta_i(U_p - U|_{x_i=l_i}); \\ \left(\alpha_i \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + \alpha_i \delta \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_{x_i=0} &= 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x_i=0} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

У цьому випадку $T_0(\mathbf{x})$, $U_0(\mathbf{x})$ – початкові розподіли температури та вологовмісту у матеріалі; $U_p(T_c, \varphi)$ – рівноважна вологість; $c(T, U)$ – теплоємність; $\rho(U)$ – густина; $\lambda_i(T, U)$ – коефіцієнти теплопровідності у напрямках анізотропії; ε – коефіцієнт фазового переходу; ρ_0 – базова густина; r – питома теплота пароутворення; $\delta(T, U)$ – термоградієнтний коефіцієнт; $a_i(T, U)$ – коефіцієнти вологопровідності; $\alpha_i(T_c, v)$ – коефіцієнти теплообміну; $\beta_i(T_c, \varphi, v)$ – коефіцієнти вологообміну; $T_c(\tau, \mathbf{x})$ – температура середовища; $\varphi(\tau)$ та $v(\tau)$ – відповідно відносна вологість та швидкість руху агента сушіння; $\mathbf{n}$ – вектор зовнішньої нормалі границі області Ω , τ – поточний час. Під час моделювання процесу сушіння в періоді нерегулярного режиму початковий розподіл вологовмісту у деревині приймається сталим, а в періоді регулярного режиму початковий вологовміст змінюється за параболічним законом.

Числова реалізація математичних моделей

Для реалізації математичної моделі напружено-деформівного стану деревини (1)–(6) адаптовано метод скінченних елементів (МСЕ) [9, 10] для дослідження в'язкопружної області деформування з врахуванням накопичення незворотних деформацій. Для цього отримано еквівалентне варіаційне формулювання задачі на основі принципу мінімуму повної потенціальної енергії. Функціонал Лагранжа, мінімум якого збігається із розв'язком математичної моделі (1)–(6), остаточно записаний у переміщеннях у вигляді

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u} d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \int_0^{\tau} \mathbf{R}(\tau, s) \mathbf{B} \mathbf{u} ds d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \varepsilon_U d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \int_0^{\tau} \mathbf{R}(\tau, s) \varepsilon_U ds d\Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Із умови мінімуму функціонала Лагранжа $\delta \Pi = 0$ отримано основні співвідношення МСЕ. Згідно з ними задача визначення компонент переміщень $\mathbf{u}_e^k = \mathbf{u}(\tau_k, \mathbf{x}_e)^T$ на кожному часовому кроці τ_k ($k = \overline{1, N_{\tau}}$, N_{τ} – кількість розбиттів за часом) у вузлах області $\mathbf{x}_e$ ($e = \overline{1, N_x}$, N_x – кількість вузлів) звелась до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), невідомими в яких є $\bar{\mathbf{u}}^k = \{\mathbf{u}_e^k, e = \overline{1, N_x}\}$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{u}}^k - \bar{\mathbf{D}}^{(k,k)} \bar{\mathbf{u}}^k &= \bar{\mathbf{D}}^{(k,k-1)} \bar{\mathbf{u}}^{k-1} + \bar{\mathbf{D}}^{(k,k-2)} \bar{\mathbf{u}}^{k-2} + \dots + \bar{\mathbf{D}}^{(k,1)} \bar{\mathbf{u}}^1 + \\ &+ 2\bar{\mathbf{A}} \varepsilon_U^k - 2\bar{\mathbf{D}}^{(k,k)} \varepsilon_U^k - 2\bar{\mathbf{D}}^{(k,k-1)} \varepsilon_U^{k-1} - \dots - 2\bar{\mathbf{D}}^{(k,0)} \varepsilon_U^0, \end{aligned}$$

через $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{D}}^{(k,k)}$ позначені матриці, коефіцієнти яких отримано шляхом дискретизації умови мінімуму функціоналу (10) у вузлах області; $\varepsilon_U^k = \varepsilon_U(\mathbf{x}_e)$ – компоненти деформацій, які виникають внаслідок зміни температури та вологовмісту у вузлах області.

Для розв'язування крайової задачі тепломасоперенесення (7)–(9) використано МСЕ у поєднанні з методом Бубнова–Гальоркіна, у результаті чого задачу (7)–(9) зведено до знаходження розв'язку задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M1} & \varepsilon \rho_0 r \mathbf{M4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{T}(\tau) \\ \dot{U}(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K1} & \mathbf{K2} \\ \mathbf{K3} & \mathbf{K4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(\tau) \\ U(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F1}(\tau) \\ \mathbf{F2}(\tau) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(0) \\ U(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix},$$
(2)

де крапкою позначений оператор диференціювання за часом; $\mathbf{M1}(T, U)$, $\mathbf{M4}(T, U)$, $\mathbf{K1}(T, U)$, $\mathbf{K2}(T, U)$, $\mathbf{K3}(T, U)$, $\mathbf{K4}(T, U)$ – матриці змінних характеристик теплового перенесення; $\mathbf{F1}(T, U, \tau)$, $\mathbf{F2}(T, U, \tau)$ – матриці змінних коефіцієнтів теплового обміну; $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ – вузлові значення функцій початкових умов; $\mathbf{T}(\tau) = \{T_e(\tau)\}$, $\mathbf{U}(\tau) = \{U_e(\tau)\}$ – вузлові значення температури та вологовмісту. Розв’язок задачі Коші (11) отримано методом типу «предиктор–коректор» [].

Для реалізації сформульованої математичної моделі визначення в’язкопружного стану (1)–(6) та тепломасоперенесення (7)–(9) у деревині в процесі сушіння розроблені діаграми UML та об’єктно-орієнтоване прикладне програмне забезпечення.

Реалізація МСЕ на основі об’єктно-орієнтованого підходу полягала у розробленні пакетів класів та відношень між ними. У окремі пакети виділено класи, що реалізують: характеристики деревини (геометричні, тепломеханічні); розбиття області на скінченні елементи; обчислювальні та допоміжні класи (квадратури для числового інтегрування, інтерполяційні функції, розв’язування СЛАР); інтерфейс користувача. Розроблено документацію створених класів. Важливі аспекти проєктованого програмного забезпечення відображено у графічній нотації UML.

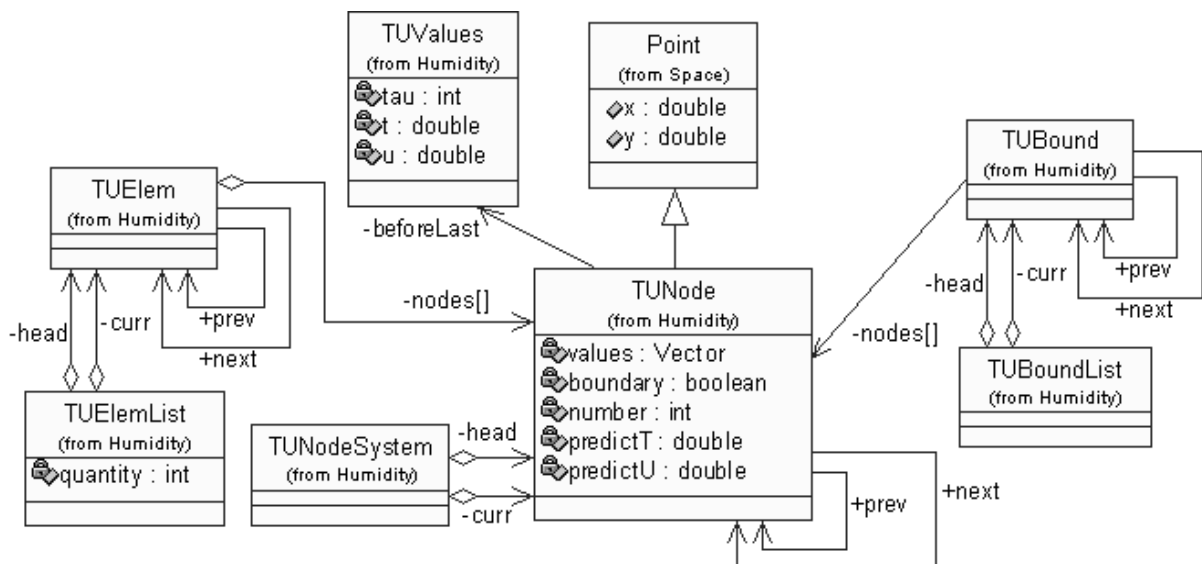


Рис. 1. UML діаграма класів та відношення між ними для реалізації розбиття області згідно з МСЕ на скінченні вузли та елементи

Зокрема, покриття області сіткою вузлів та її розбиття згідно з МСЕ реалізують такі класи (рис. 1): вузли $TUNode$, якими покривається область (що є точкою $TUPoint$ та містить вузлові значення $TUValues$), та їхній список $TUNodeSystem$, скінченний елемент $TUElem$ та їхній список $TUElemList$, граничний елемент $TUBound$ та їхній список $TUBoundList$. На відміну від відомих реалізацій МСЕ зберігання обчислювальної інформації про скінченні вузли та елементи здійснено не у масивах, а на основі списків.

Отже, здійснено програмну реалізацію МСЕ на основі списків, у якій кожен об’єкт-сутність запрограмований у вигляді окремого класу. Усі класи задокументовані і можуть використовуватись повторно для реалізації інших математичних моделей методом скінченних елементів. Розроблені діаграми класів і діаграми послідовності дали змогу встановити порядок створення, знищення, взаємодії об’єктів і відношення між ними. Діаграма послідовності (рис. 2) відображає взаємодії у

системі, а саме послідовність виконання операцій різними об'єктами під час числової реалізації математичних моделей визначення тепломасоперенесення (7)–(9) і в'язкопружного стану деревини (1)–(6) в процесі сушіння.



Рис. 2. Діаграма послідовності розрахунку в'язкопружного стану деревини

Наведено оцінку похибки та порядок збіжності наближеного розв'язку, отриманого МСЕ, до точного. Шляхом порівняння розрахованих значень температури та вологовмісту з відомими експериментальними даними проведено верифікацію моделі, яка показала, що за різних способів апроксимації похибка моделі тепломасоперенесення не перевищує 9,6 %. Перевірено адекватність моделі в'язкопружного стану двома способами. Спочатку проведено порівняльний аналіз результатів моделювання без врахування реологічної поведінки (ядро релаксації $\mathbf{R}(\tau - s) \equiv 0$) з результатами відомих пружних моделей. Потім зіставлено результати розрахунків в'язкопружного стану сформульованої двовимірної та відомих одновимірних моделей. Аналіз результатів свідчить про те, що розроблене програмне забезпечення дає змогу з задовільною точністю здійснювати числову реалізацію математичних моделей.

Числовий аналіз математичних моделей

На основі розробленого програмного забезпечення реалізації математичних моделей здійснено числові експерименти дослідження впливу основних технологічних факторів на тепломасоперенесення та в'язкопружне деформування деревини під час сушіння. Необхідні для розрахунків емпіричні залежності теплофізичних і механічних характеристик деревини сосни наведені у [4, 5, 11].

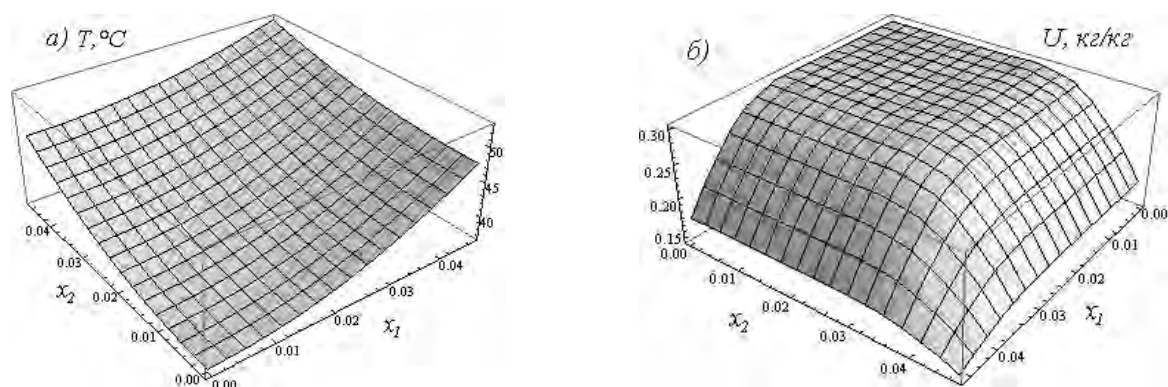


Рис. 3. Розподіл температури через 2 год (а) та вологовмісту через 20 год (б) після початку сушіння у поперечного перерізі букового бруска

Аналіз кривих розподілу нестационарних полів температури (рис. 3 а) показав, що різне відношення геометричних розмірів, нехтування анізотропією змінних теплових характеристик спричиняє зміну температури матеріалу на $1\div 2^{\circ}\text{C}$. Нагрівання тіла відбувається експоненціально швидко, температура деревини асимптотично наближається до температури середовища. Зміна відносної вологості та швидкості руху агента сушіння може пришвидшити нагрівання матеріалу.

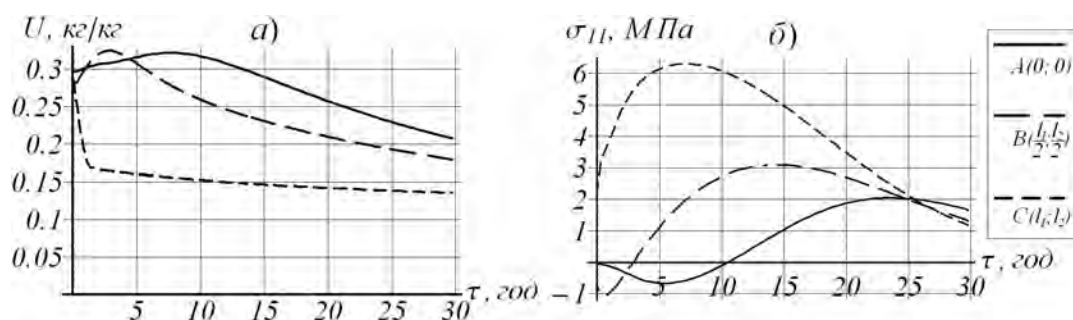


Рис. 4. Зміна в часі вологовмісту (а) та нормальних напружень (б) в точках $A(0,0)$, $B(\frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2})$, $C(l_1, l_2)$ поперечного перерізу соснового бруска

Підтверджено, що рівномірний розподіл початкового вологовмісту після переходу у регулярний період видалення зв'язаної води набуває параболічного характеру (рис. 3, б). Показано, що в нерегулярному періоді сушіння деяка частка води у деревині починає випаровуватися через її поверхню, а деяка частка прямує до центру матеріалу (рис. 4, а). Цей, відомий із експериментів факт, не вдалось змоделювати без врахування залежності тепломеханічних характеристик деревини від змінних температурно-вологісних умов. Така зміна розподілу води спричиняє розвиток стискних напружень біля поверхні матеріалу та розтягувальних у центрі.

Порівняльний аналіз результатів моделювання з різними співвідношеннями геометричних розмірів поперечного перерізу показав, що зміна розміру висушуваного бруска в одному напрямі змінює розподіл компонент напружень в іншому напрямі, а це підтверджує те, що модель враховує анізотропність деревини.

Аналіз результатів моделювання для різних порід деревини підтвердив, що видалення води відбувається пропорційно базовій густині матеріалу. У деревині дуба та бука видалення води із середини відбувається повільніше, ніж у деревини сосни. Це збільшує різницю між вологовмістом на поверхні та всередині матеріалу, а також є причиною більших значень напружень у деревах з більшою густиною.

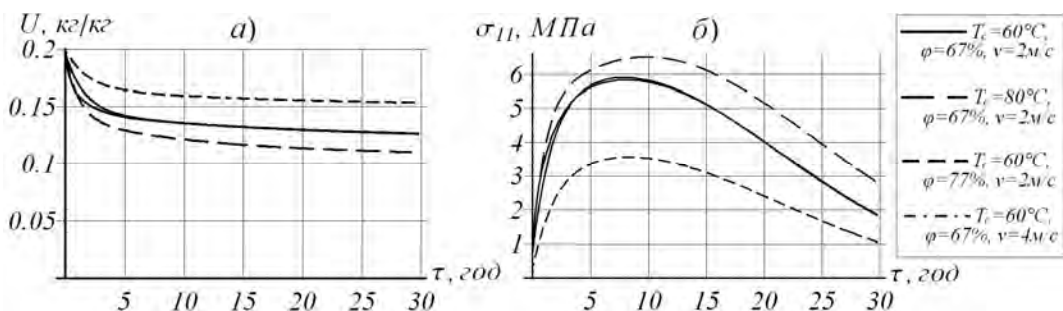


Рис. 5. Вплив параметрів зовнішнього середовища на зміну з часом вологовмісту (а) та компонент нормальних напружень (б) у поперечному перерізі букового бруска

Досліджено вплив технологічних параметрів процесу сушіння деревини (рис. 5). Зокрема, збільшення температури середовища інтенсифікує процес сушіння і посилює розвиток напружень. Збільшення відносної вологості повітря в камері «пом'якшує» режим сушіння та зменшує абсолютні значення напружень.

Задача оптимізації вибору технологічних режимів

Сформульовано та розв'язано задачу оптимізаційної побудови режимів процесу сушіння деревини, яка ґрунтується на отриманих у попередніх розділах закономірностях розподілу $T(\tau, \mathbf{x})$, $U(\tau, \mathbf{x})$ та $\sigma_{ij}(\tau, \mathbf{x})$.

Необхідно знайти такі функції температури $T_c(\tau)$ та відносної вологості $\phi(\tau)$ середовища, щоб, враховуючи обмеження, накладені на них:

$$T_{c_a} \leq T_c(\tau) \leq T_{c_b}; \quad \phi_a \leq \phi(\tau) \leq \phi_b \quad (1)$$

і на в'язкопружні напруження:

$$|\sigma_{11}(\tau, \mathbf{x})| \leq \sigma_{11_a}; \quad |\sigma_{22}(\tau, \mathbf{x})| \leq \sigma_{22_a}; \quad |\sigma_{12}(\tau, \mathbf{x})| \leq \sigma_{12_a}, \quad (2)$$

для дерев'яного бруска з початковим вологовмістом

$$U(0, \mathbf{x}) = U_0(\mathbf{x}) \quad (3)$$

за заданий час сушіння $\tau_{кін}$ мінімізувати середнє значення кінцевого вологовмісту, яке обчислюється за формулою

$$J(U) \equiv \frac{1}{l_1 \times l_2} \int_{\Omega} U(\tau_{кін}, \mathbf{x}) d\Omega \rightarrow \min. \quad (4)$$

Проаналізовано питання вибору цільової функції задачі оптимізації (12)–(14) для побудови багатоступеневих режимів процесу сушіння деревини. Якщо виділити три основні ступені режиму сушіння, то для кожного можна сформулювати власні критерії оптимальності. Для першого (прогрівання деревини) – максимізація температури деревини при обмеженнях на напруження. Для другого (сталості швидкості сушіння) – мінімізація вологовмісту при обмеженнях на напруження. Для третього – мінімізація абсолютних значень напружень без збільшення уже досягнутого середнього значення вологовмісту.

Побудову оптимального триступеневого режиму процесу сушіння з такими критеріями на кожному ступені здійснено на основі методу генетичних алгоритмів [12]. Розв'язок задачі представлено у вигляді:

$$T_c(\tau) = \begin{cases} T_{c1}, & 0 \leq \tau \leq \tau_1; \\ \phi(\tau, \{\tau_1, T_{c1}, T_{c2}\}), & \tau_1 < \tau \leq \tau_1 + 3600; \\ T_{c2}, & \tau_1 + 3600 < \tau \leq \tau_2; \\ \phi(\tau, \{\tau_1, T_{c2}, T_{c3}\}), & \tau_2 < \tau \leq \tau_2 + 3600; \\ T_{c3}, & \tau_2 + 3600 < \tau \leq \tau_{кін}, \end{cases}$$

де $\phi(\tau, \{\tau_i, y_1, y_2\})$ – заданий експоненціальний закон переключення між ступенями.

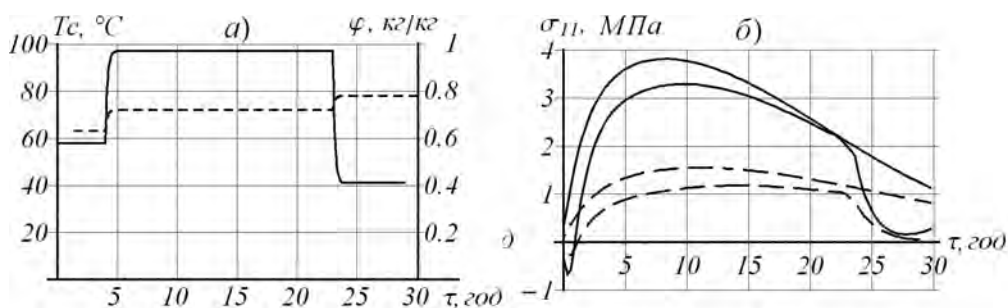


Рис. 6. Триступеневий режим, отриманий розв'язуванням задачі оптимізації (а) та розвиток нормальних напружень (б) в поверхневих (---) та центральних шарах (—) деревини за дії триступеневого режиму та сталих параметрів середовища

Аналогічно записано вираз для $\varphi(\tau)$. Відповідна хромосома – допустимий розв’язок задачі має вигляд

$$\chi = \{\tau_1, \tau_2, T_{c1}, T_{c2}, T_{c3}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}.$$

Функція придатності, яка відповідає за максимальне зменшення вологовмісту при обмеженнях на напруження, записана у вигляді

$$P(\chi) = \begin{cases} 0, & \max_{\Omega} |\sigma_{ij}| \geq 75\% \sigma_{m.m.}; \\ -J(U), & \text{інакше,} \end{cases}$$

де $\sigma_{m.m.}(T, U)$ – експериментально визначена межа міцності деревини [13].

Застосування цих алгоритмів дало змогу не лише знайти шукані функції $T_c(\tau)$ та $\varphi(\tau)$, які задовольняють зазначені критерії на кожному ступені режиму, але й оптимально вибрати моменти часу τ_1 , τ_2 для переведення на наступний ступінь. Результати моделювання, здійсненого для деревини бука, наведено на рис. 6.

Висновки

- Розв’язано важливу для процесу сушіння деревини задачу тепломасоперенесення, у якій враховано анізотропію змінних температурно-вологісних характеристик деревини.
- Сформульовано математичну модель в’язкопружного стану деревини, в якій враховано накопичення незворотних деформацій та анізотропію змінних тепломеханічних характеристик деревини.
- Створено об’єктно-орієнтоване програмне забезпечення, яке реалізує математичну модель шляхом адаптації методу скінченних елементів для дослідження в’язкопружної області деформування капілярно-пористих гігроскопічних матеріалів.
- Здійснено числовий аналіз впливу технологічних параметрів процесу сушіння деревини на двовимірний температурно-вологісний та в’язкопружний стан матеріалу зі змінними тепломеханічними властивостями.

1. Соколовський Я.І. Взаємозв’язок деформаційно-релаксацийних і тепломасообмінних процесів у капілярно-пористих тілах // Доповіді НАН України, сер. Механіка. – 1998. – № 9. – С. 76–80.
2. Dubois-Pelerin, Y. Object-Oriented Finite Element Programming: III. An Efficient Implementation in C++ / Y. Dubois-Pelerin, T. Zimmermann // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1993. – Vol. 108, no. 1–2. – Pp. 165–183.
3. Zimmermann, T. Object-Oriented Finite Element Programming: I. Governing Principles / T. Zimmermann, Y. Dubois-Pelerin, P. Bommé // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1992. – Vol. 98, no. 2. – Pp. 291 – 303.
4. Соколовський Я.І. Моделирование деформационно-релаксационных процессов в древесине во время сушки / Я.І. Соколовський, М.В. Дендюк, Б.П. Побережко // Лесной журнал: изв. ВУЗов России.- Архангельск, 2007, №1 – С. 75–83.
5. Соколовський Я.І. Влияние основных факторов процесса сушки на напряженно-деформированное состояние древесины / Я.І. Соколовський, М.В. Дендюк // Актуальные проблемы лесного комплекса: Сб. научн. трудов. – Брянск (РФ): БГИТА, 2006. – Вып. 16. – С. 91–96.
6. Соколовський Я.І., Дендюк М.В. Математичне моделювання двовимірного в’язкопружного стану деревини у процесі сушіння // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2008. Т. 7. – С. 69–78.
7. Копысов С.П. Реализация объектно-ориентированной модели метода бесконечных областей на основе параллельных распределённых элементов // С.П. Копысов, И.В. Краснощёков, В.Н. Рычков // Вычислительные методы и программирование. – 2003. – Т. 4., № 1. – С. 194–206.
8. Соколовський Я.І. Андрашек Й.В. Методика та результати експериментальних досліджень реологічної поведінки деревини // Науковий вісник: Зб. наук.-техн.праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 1999. Вип. 9.13. – С. 15–26.
9. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 394 с.
10. Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я.Г. Савула. – Львів: ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 2004. – с. 222.
11. Шубин Г.С. Сушка и тепловая обработка древесины. – М.: Лесная промышленность, 1990. – 336 с.
12. Генетичні алгоритми. – [Електронний ресурс] – <http://www.victoria.lviv.ua/html/oio/html/theme10.htm>.
13. Соболев О.С. Древесина как конструкционный материал. – М.: Лесная промышленность, 1979. – 248 с.