

МОДЕЛЮВАННЯ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ З ВИКОРИСТАННЯМ СФЕРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Мета. Існує багато методів моделювання регіонального гравітаційного поля, в яких використовують сферичні функції Лежандра цілого ступеня, проте дійсного порядку. Проте вони стосуються переважно регіону, який за формою становить сегмент сфери. Крім того, для їх використання потрібно вхідні дані трансформувати на сегмент сфери з центром на північному полюсі. Метою цієї роботи є знаходження системи функцій, яка б мала ортогональні властивості на довільній сферичній трапеції, а також дослідження властивостей такої системи. **Методика.** Взнявши за основу сферичні функції Лежандра на сферичному сегменті, розроблено систему функцій, ортогональну на довільній сферичній трапеції. Такі функції не можна задати в явному вигляді, а також вони не мають рекурентних співвідношень. **Результати.** Розглянуто приєднані сферичні функції Лежандра на сферичній трапеції, які мають властивість ортогональності на цьому регіоні. Наведено формули для знаходження норми таких функцій. Отримані функції можна використовувати для побудови регіональних моделей гравітаційних полів на довільній сферичній трапеції. Ортогональна властивість досліджуваних функцій забезпечує стійкий розв'язок під час знаходження невідомих коефіцієнтів моделі. Для високоточного моделювання регіонального гравітаційного поля необхідно перегридувати вхідні дані (виміряні трансформанти геопотенціалу) на певний ґрид, і після цього можна використати часткову дискретну ортогональність даних функцій по довготі або повну дискретну ортогональність подібно до другого методу Неймана. Це дає змогу суттєво скоротити час обчислень без втрати точності, адже досліджувані функції не мають рекурсивних співвідношень і для їх знаходження необхідно використовувати розклад в гіпергеометричний ряд. **Наукова новизна і практична значущість.** У цій роботі вперше отримано систему функцій, ортогональну на довільній сферичній трапеції. Її можна використовувати для побудови регіонального гравітаційного поля, регіонального магнітного поля, а також для задач високоточної інтерполяції або апроксимації, наприклад побудови регіональної моделі іоносфери.

Ключові слова: сферичні функції, сферична трапеція, ортогональність.

Вступ

Для побудови моделі гравітаційного поля Землі здебільшого використовують приєднані сферичні функції Лежандра. Їх використання є доволі зручним, оскільки вони володіють властивістю ортогональності на всій сфері, а також, подібно до потенціальної функції, підлягають рівнянню Лапласа [Hobson 1931]. Також їх можна розкласти в скінченний гіпергеометричний ряд. Це дає змогу для їх обчислення використовувати прості рекурсивні відношення. Проте, якщо виміри проведено не по всій Землі, а на якійсь її частині, і необхідно обчислити регіональну модель, приєднані сферичні функції Лежандра використовувати недоцільно, оскільки на обмеженому регіоні вони втрачають свою ортогональність і розв'язок стає нестабільним.

Для вирішення цієї проблеми у 1985 році запропоновано використовувати метод spherical cap harmonic analysis, який передбачає трансформування вхідних даних на сферичну шапку і використання в якості базової системи функцій сферичних функцій Лежандра цілого порядку, але дійсного ступеня [Haines 1985]. Такі

функції підлягають рівнянню Лапласа і формують дві ортогональні системи функцій на шапці сфери. Проте, в загальному, дані функції неортогональні. Вони не мають рекурентних відношень, і їх можна знайти за допомогою розкладу в нескінченний гіпергеометричний ряд [Haines 1988]. Також запропоновано метод adjusted spherical harmonic analysis [De Santis 1992], який передбачає перетворення системи координат із шапки сфери на півсферу. В такому випадку власні числа сферичних функцій стають цілими числами. Але незважаючи на це, такі функції все одно не є ортогональними, а по аналогії з функціями на шапці сфери формують дві ортогональні системи функцій. Також запропоновано такі методи, як translated origin spherical harmonic analysis [De Santis 1991], revised spherical cap harmonic analysis [Thebault *et al.* 2006] та інші.

Мета

Для обчислення високоточних гравітаційних полів необхідно будувати моделі досить високих порядків. Наприклад, глобальні моделі EGM 2008 та EIGEN-6C4 побудовані до 2190

ступеня/порядку [Pavlis *et al.* 2012]. Незважаючи на те, що моделі регіональних полів такої ж точності матимуть набагато менший максимальний ступінь/порядок, для стабільного розв'язку бажано використовувати як базову ортогональну систему функцій [De Santis & Torta 1997]. Метою цієї роботи є знаходження та дослідження такої системи функцій на сферичній трапеції.

Методика

$$\sin \theta \cdot g''(\theta) + \cos \theta \cdot g'(\theta) + \left[n(n+1) \sin \theta - \frac{m^2}{\sin \theta} \right] \cdot g(\theta) = 0, \quad (2)$$

а його розв'язком є сферичні функції Лежандра першого та другого роду. Оскільки сферичні функції Лежандра другого роду розбігаються на полюсах, практично використовують сферичні функції Лежандра першого роду, які можна

$$P_{nm}(\cos \theta) = \sin^m \theta \cdot F\left(m-n, n+m+1, 1+m, \frac{1-\cos \theta}{2}\right), \quad (3)$$

при чому n і m залежать від накладених граничних умов, а $g(\theta) = P_{nm}(\cos \theta)$.

Якщо на деякому сегменті сфери $\theta \leq \theta_0$ знайти такі значення n , для яких виконується рівність

$$\frac{dP_{nm}(\cos \theta_0)}{d(\cos \theta)} = 0, \quad (4)$$

а також

$$P_{nm}(\cos \theta_0) = 0, \quad (5)$$

то відповідні функції будуть формувати дві ортогональні системи функцій на сегменті сфери, що розглядається [Haines 1985; Haines 1988].

Розглянемо на сферичній трапеції (рис. 1), обмеженій координатами $\theta_{\min}, \theta_{\max}, \lambda_{\min}, \lambda_{\max}$, наступні функції:

$$\left. \begin{aligned} P_{km} &= \sin^m(\theta - \theta_{\min}) \cdot F\left(m-n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \cos(\theta - \theta_{\min})}{2}\right), \text{ if } \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{mean} \\ P_{km} &= (-1)^{k+m} \sin^m(\theta_{\max} - \theta) \cdot F\left(m-n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \cos(\theta_{\max} - \theta)}{2}\right), \text{ if } \theta_{mean} \leq \theta \leq \theta_{\max} \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

де k і m – цілі числа, θ_{mean} – середнє значення, а саме $\theta_{mean} = (\theta_{\min} + \theta_{\max})/2$. В свою чергу значення n_k залежатимуть від k і m . Їх можна

Для моделювання гравітаційних полів в сферичній системі координат (r, θ, λ) здебільшого використовують функції, кожна з яких залежить тільки від однієї координати

$$V = f(r) \cdot g(\theta) \cdot h(\lambda) \quad (1)$$

і які підлягають рівнянню Лапласа. Рівняння Лапласа по широті являє собою диференціальне рівняння другого порядку

представити через гіпергеометричний ряд наступним чином [Hobson 1931; Hwang & Chen 1997]

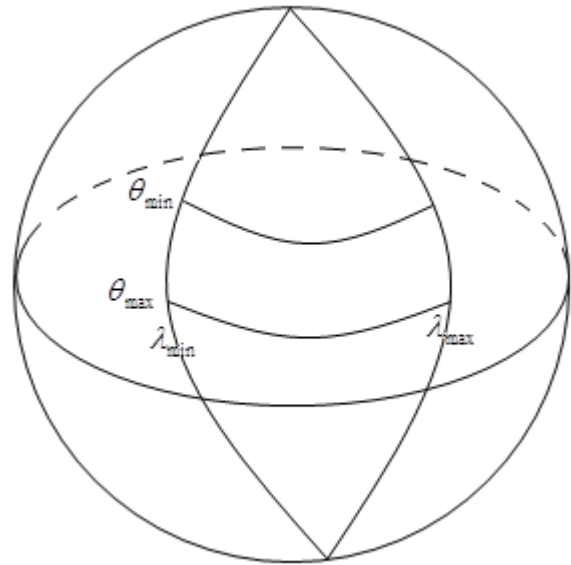


Рис. 1. Сферична трапеція

знайти за допомогою рівняння [Haines 1985; Hwang & Chen 1997]

$$\tilde{F}(n_k, m, \cos \theta_0) = 0, \quad (7)$$

якщо $k-m$ є непарним числом, або за допомогою рівняння

$$n_k \cos \theta_{mean} \tilde{F}(n_k, m, \cos \theta_0) - (n_k - m) \tilde{F}(n_k - 1, m, \cos \theta_0) = 0, \quad (8)$$

якщо $k-m$ є парним числом, де гіпергеометричного ряду, а саме [Hwang & Chen 1997]

$\theta_0 = (\theta_{max} - \theta_{min})/2$, а \tilde{F} – умовне позначення

$$\tilde{F}(n, m, \mu) = F(m-n, m+n+1, m+1, \frac{1-\mu}{2}). \quad (9)$$

Із рівнянь (7) і (8) очевидно, що функції (6) є неперервними, оскільки у точці $\theta = \theta_{mean}$ вони мають однакове значення. Коли $k-m$ є парним числом, тоді $(-1)^{k+m} = 1$, а коли $k-m$ є непарним числом, то $P_{km}(\theta_{mean}) = 0$.

Результати

Функції (6) формують на відрізку $[\theta_{min}; \theta_{mean}]$ дві ортогональні системи функцій за вагою $\sqrt{\sin(\theta - \theta_{min})}$ [Haines 1985; Smythe 1950]

$$\int_{\theta_{min}}^{\theta_{mean}} P_{km}(\theta) P_{sm}(\theta) \sin(\theta - \theta_{min}) d\theta = 0, \quad (10)$$

при чому $k \neq s$, а також $k-m$ і $s-m$ або обоє парні або обоє непарні. Аналогічний вираз можна записати і для відрізка $[\theta_{mean}; \theta_{max}]$

$$\int_{\theta_{mean}}^{\theta_{max}} P_{km}(\theta) P_{sm}(\theta) \sin(\theta_{max} - \theta) d\theta = 0. \quad (11)$$

Із (6) видно, що якщо $k-m$ парне, то і функції P_{km} будуть парними на відрізку $[\theta_{min}; \theta_{max}]$ відносно θ_{mean} , а якщо $s-m$ непарне, то функції

P_{km} будуть непарними на цьому ж відрізку відносно θ_{mean} . Відомо, що інтеграл від добутку парної функції на непарну рівний нулю. Підсумовуючи все вище сказане, можна зробити висновок, що функції (6) є ортогональними на відрізку $[\theta_{min}; \theta_{max}]$, тобто

$$\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} P_{km}(\theta) P_{sm}(\theta) \sin(\theta_0 - |\theta - \theta_{mean}|) d\theta = 0. \quad (12)$$

Побудуємо графіки функцій (6) на проміжку, наприклад, $[20^\circ; 70^\circ]$. Для цього спочатку за допомогою формул (7-9) знайдено значення n_k для $\theta_0 = 25^\circ$. Ці значення подано в таблиці 1.

Таблиця 1

Значення $n_k(m)$ для $\theta_0 = 25^\circ$

k/m	0	1	2	3
0	0.000			
1	5.004	3.806		
2	8.296	8.296	6.632	
3	12.148	11.743	11.324	9.318

Графік функцій (6) для $m=0$ і $k=0,3$ подано на рисунку 2

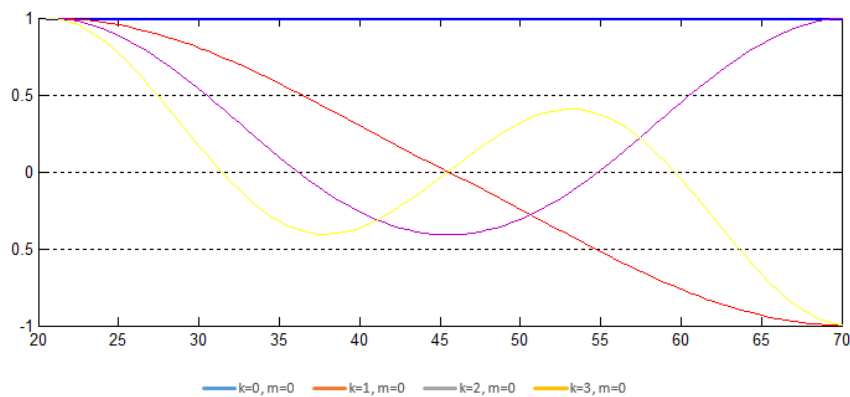


Рис. 2. Сферичні функції Лежандра (6) на проміжку $[20^\circ; 70^\circ]$

Розглянемо на відрізку $[\lambda_1; \lambda_2]$ наступні функції

$$\left. \begin{aligned} h_m^c &= \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) \\ h_m^s &= \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

де m – ціле число. Не важко показати, що такі функції формують ортогональну систему функцій на відрізку $[\lambda_1; \lambda_2]$, тобто

$$\left. \begin{aligned} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) \cdot \sin\left(2\pi l \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) d\lambda &= 0 \\ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) \cdot \cos\left(2\pi l \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) d\lambda &= 0 \\ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) \cdot \cos\left(2\pi l \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) d\lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

при чому $m \neq l$.

Для прикладу побудуємо графіки функцій (13) для $m=0,3$ на відрізку $[30^\circ; 50^\circ]$, які зображено на рисунку 3.

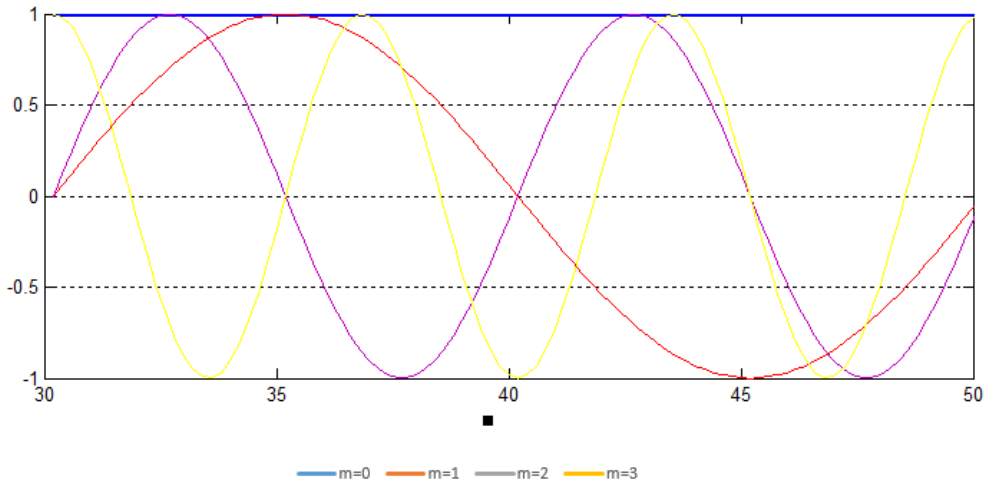


Рис. 3. Функції, ортогональні на проміжку $[30^\circ; 50^\circ]$

Підсумовуючи вищенаведене, отримаємо на сферичній трапеції, обмеженій координатами $\theta_{\min}, \theta_{\max}, \lambda_{\min}, \lambda_{\max}$, наступні функції

$$\left. \begin{aligned} R_{km}(\theta, \lambda) &= P_{km}(\cos \theta) \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) \\ S_{km}(\theta, \lambda) &= P_{km}(\cos \theta) \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Із рівнянь (12) і (14) очевидно, що функції (15) володіють властивістю ортогональності на сферичній трапеції, а саме

$$\left. \begin{aligned} \iint_{\sigma} R_{nm}(\theta, \lambda) R_{sr}(\theta, \lambda) d\sigma &= 0 \\ \iint_{\sigma} S_{nm}(\theta, \lambda) S_{sr}(\theta, \lambda) d\sigma &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ if } s \neq n \text{ or } r \neq m;$$

$$\iint_{\sigma} R_{nm}(\theta, \lambda) S_{sr}(\theta, \lambda) d\sigma = 0 \quad \text{in any case,} \quad (16)$$

де $d\sigma$ – елемент сфери, а інтегрування проводиться по сферичній трапеції.

На рисунку 4 зображено графік функції $R_{63}(\theta, \lambda)$.

Функції (6) змінюють знак $k-m$ разів на інтервалі $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$. В свою чергу, функції (13) мають $2m$ нулів на інтервалі $\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$. Тобто функції (15) ділять сферичну трапецію

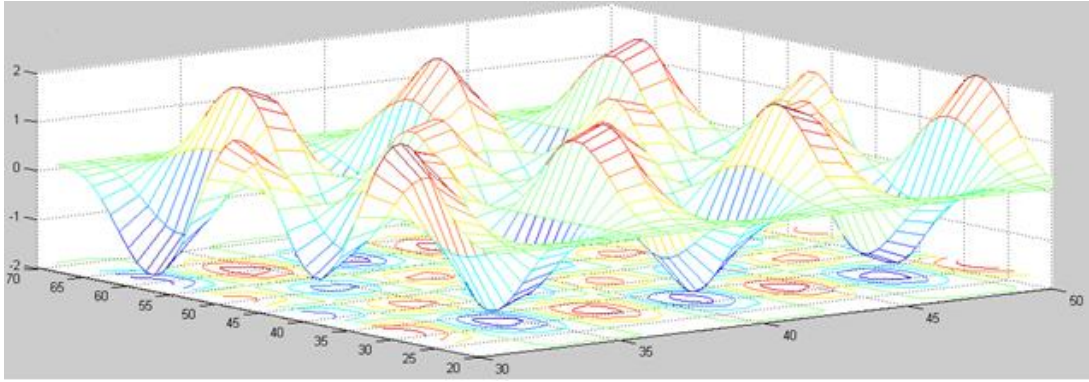


Рис. 4. Графік функції $R_{63}(\theta, \lambda)$

на частини, в яких вони по черзі додатні і від'ємні, подібно до шахової дошки. Геометричне представлення функції $R_{63}(\theta, \lambda)$ подано на рисунку 5.

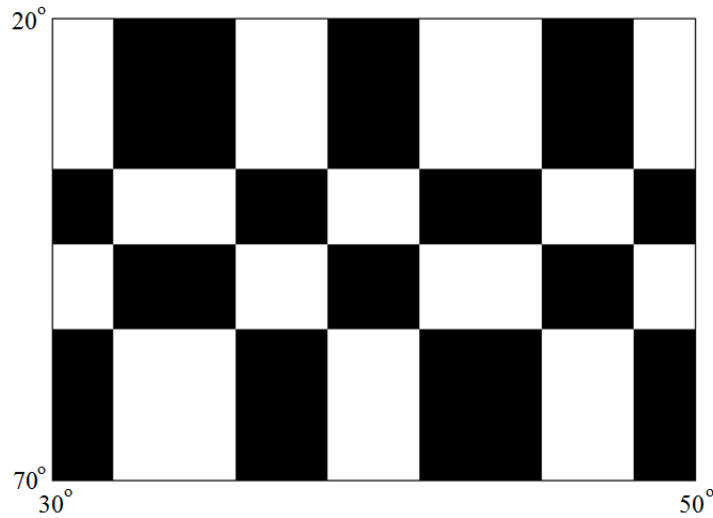


Рис. 5. Нулі функції $R_{63}(\theta, \lambda)$

Норму функцій (6) можна знайти за наступною формулою [Haines 1985; Hwang 1993]

$$\left. \begin{aligned} N_{km}^2 &= \int_0^{\theta_0} P_{n_k(m)m}^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 2 \frac{(\cos^2 \theta_0 - 1)}{2n_k + 1} \frac{\partial}{\partial n} \left[P_{n_k(m)m}(\cos \theta_0) \right] \frac{dP_{n_k(m)m}(\cos \theta_0)}{d(\cos \theta)}, \text{ if } k - m = \text{odd} \\ N_{km}^2 &= \int_0^{\theta_0} P_{n_k(m)m}^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta = -2 \frac{(1 - \cos^2 \theta_0)}{2n_k + 1} P_{n_k(m)m}(\cos \theta_0) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{dP_{n_k(m)m}(\cos \theta_0)}{d(\cos \theta_0)} \right], \text{ if } k - m = \text{even} \end{aligned} \right\} (17)$$

Вирази для знаходження величин $\frac{\partial}{\partial n} [P_{n_k(m)m}(\cos \theta_0)]$ та $\frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{dP_{n_k(m)m}(\cos \theta_0)}{d(\cos \theta)} \right]$ розглянуто в [Hwang & Chen 1997; Macdonald 1900]. В свою чергу, легко показати, що норма функцій (13) має вигляд

$$Q^2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \cos^2 \left(2\pi n \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sin^2 \left(2\pi n \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) d\lambda = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}. \quad (18)$$

Легко бачити, що вираз для знаходження нормованих функцій (15) наступний

$$\begin{aligned} \bar{R}_{km}(\theta, \lambda) &= \frac{R_{km}(\theta, \lambda)}{N_{km} Q}, \\ \bar{S}_{km}(\theta, \lambda) &= \frac{S_{km}(\theta, \lambda)}{N_{km} Q}. \end{aligned} \quad (19)$$

Функції $\bar{R}_{km}(\theta, \lambda)$ та $\bar{S}_{km}(\theta, \lambda)$ формують ортонормовану систему функцій на сферичній трапеції. Практично будь-яку функцію V , задану на сферичній трапеції, можна розкласти в ряд за функціями (19)

$$V = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \sum_{m=0}^k \bar{a}_{km} \bar{R}_{km}(\theta, \lambda) + \bar{b}_{km} \bar{S}_{km}(\theta, \lambda), \quad (20)$$

де \bar{a}_{km} і \bar{b}_{km} – невідомі коефіцієнти.

Наукова новизна і практична значущість

Розроблено систему функцій, ортогональну на довільній сферичній трапеції. Її можна використовувати для побудови моделі регіонального гравітаційного поля високої розрізняювальної здатності.

Висновки

В даній роботі для моделювання регіонального гравітаційного поля розроблено систему функцій, ортогональну на сферичній трапеції. Алгоритм використання таких функцій є наступним: 1) знаходження координат вершин сферичної трапеції $\theta_{\min}, \theta_{\max}, \lambda_{\min}, \lambda_{\max}$, на якій відомі вхідні дані; 2) визначення середини трапеції і знаходження власних чисел n ; 3) знаходження норми функцій, що розглядаються; 4) визначення невідомих коефіцієнтів моделі за допомогою методу найменших квадратів.

Варто зазначити, що при побудові моделей високих порядків бажано вхідні дані розмістити на певний ґрид [Sneeuw 1994], що дасть можливість не тільки скоротити час обчислень без втрати точності, але й використати дискретну ортогональність даних функцій під час обчислення і обернення матриці нормальних рівнянь [Marchenko & Dzhuman 2015].

Надійшла 07.08.2017 р.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- De Santis, A., 1991. Translated origin spherical cap harmonic analysis, *Geophys. J. Int.*, **106**, 253–263.
- De Santis, A., 1992. Conventional spherical harmonic analysis for regional modeling of the geomagnetic field, *Geophys. Res. Lett.*, **19**, 1065–1067.
- De Santis, A. & Torta, J., 1997. Spherical cap harmonic analysis: a comment on its proper use for local gravity field representation, *J. of Geodesy*, **71**, 526–532.
- Haines, G., 1985. Spherical cap harmonic analysis, *J. Geophys. Res.*, **90**, 2583–2591.
- Haines, G., 1988. Computer programs for spherical cap harmonic analysis of potential and general fields, *Comput. Geosci.*, **14**, 413–447.
- Hobson, E., 1931. The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, *New York: Cambridge Univ. Press*, 476 p.
- Hwang, C., 1993. Spectral analysis using orthonormal functions with a case study on the sea surface topography, *Geophys. J. Int.*, **115**, 148–1160.
- Hwang, C. & Chen, S., 1997. Fully normalized spherical cap harmonics: application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1, *Geophys. J. Int.*, **129**, 450–460.
- Macdonald, H., 1900. Zeroes of the spherical harmonic $P_n^m(\mu)$ considered as a function of n , *Proc. London Math. Soc.*, **31**, 264–278.
- Marchenko, A. & Dzhuman, B., 2015. Regional quasigeoid determination: an application to arctic gravity project, *Geodynamics*, **18**, 7–17.
- Pavlis, N.K., Holmes, S.A., Kenyon, S.C. & Factor, J.K., 2012. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008), *J. geophys. Res.*, **117**, B04406. doi:10.1029/2011JB008916.
- Smythe, W., 1950. Static and dynamic electricity, *New York: McGraw-Hill*, 635pp.
- Sneeuw, N., 1994. Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective, *Geophys. J. Int.*, **118**, 707–716.
- Thebault, E., Manda, M. & Schott, J., 2006. Modeling the lithospheric magnetic field over France by means of revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA), *J. geophys. Res.*, **111**, 111–113