

ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНИХ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИХ ЗОН ЗА ДАНИМИ ГЕОДЕЗИЧНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

К. Бурак

(Івано-Франківський державний технічний університет нафти і газу)

Допустимо, що об'єкт, який ми вивчаємо, можна змоделювати, як сущільне середовище. Це може бути, як блок гірських порід в випадку орогенних тектонічних рухів, чи рухів, визваних підземними виробітками корисних копалин до появи тріщин, так і сущільна фундаментна плита споруди, що деформується внаслідок осідання ґрунту.

Допустимо також, що виконані виміри координат системи попередньо замаркованих точок, що належать об'єкту в моменти часу - t_0 та t_1 . Тоді різниці координат будуть являти собою параметри векторів переміщень і при умові встановлення по цих даних аналітичних залежностей, наприклад, вигляду :

$$\begin{aligned}\Delta x &= f_1(x, y) \\ \omega &= \Delta y = f_2(x, y) \\ \Delta z &= f_3(x, y)\end{aligned}\quad (1)$$

є можливість визначення за їх допомогою компонентів тензорів деформацій та напружень в січеннях об'єкту, що вивчається.

Теоретичною основою цього являється залежність, яка в рамках геометрично-лінійної теорії пружності встановлює зв'язок між компонентами тензорів деформації ε_{ij} і векторами переміщень ω через коваріантні похідні вектора переміщень $-\nabla_i \omega^k$

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(\nabla_i \omega^j - \nabla_j \omega^i), \quad (2)$$

де

$$\nabla_i \omega^k = (\partial \omega^k / \partial \eta^i + \omega^l \Gamma_{il}^k) \quad (3)$$

Γ_{il}^k - символ Кристофеля, або коефіцієнт зв'язності.

Знаючи компоненти тензора деформацій можна вирахувати компоненти тензора внутрішніх напружень - p^{ki} , виходячи з основного рівняння теорії пружності :

$$\nabla p^{ki} = 0 \quad (4)$$

де

$$p^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu \varepsilon^{ij} \quad (5)$$

Вираз (5) являє собою узагальнений закон Гука, в ньому:

λ, μ - параметри Ламе;

$I_1(\varepsilon) = g^{if} \varepsilon_{if}$ - перший інваріант тензора деформацій;

g^{if} - метричний тензор системи координат.

Таким чином, компоненти тензорів деформацій і напружень в певному січенні об'єкту можуть бути визначені, якщо вести спостереження за деформацією геодезичними методами, періодично визначаючи координати по певній спостережувальній сітці точок. Точність оцінки по цих даних напружено-деформованого стану об'єкту, або його зміни буде залежати, очевидно, як від точності визначення координат, так і від густоти сітки спостережуваних точок і частоти спостережень, тобто об'єму спостережень.

Сучасні супутникові системи GPS, цифрові нівеліри, прилади для високоточних лінійних вимірювань, що дозволяють з порівнянно невеликими трудозатратами досягти точності в залежності від розмірів об'єкту 2-0.1 мм, роблять рішення цієї задачі реальним і конкурентно здатним з іншими методами неруйнівного контролю.

Аналіз одержуваної в результаті обчислень інформації про компоненти тензорів напружень дозволить більш об'єктивно виявляти критичні зони, дослідження яких можна виконати більш детально, ніж це можливо для всього об'єкту в цілому.

Для ілюстрації сказаного вище, розглянемо питання прогнозу напружено-деформованих зон за матеріалами традиційних спостережень методом геометричного нівелювання. Підкреслимо ще раз, що, якщо навіть при цьому фіксуються характеристики параметру вектора переміщень, зміна якого найбільш суттєва, ми рекомендуємо цей метод тільки для прогнозу критичних зон, в яких необхідна постановка більш детальних, комплексних досліджень. Разом з тим, оскільки фіксується зміна тільки одного параметру вектора переміщень, то алгоритм обчислень не такий громіздкий, як в загальному випадку і, в рамках навіть даної статті, є можливість привести майже повний вивід робочих формул в координатному вигляді. Звернемо увагу і на те, що в цьому випадку з'являється і можливість побудови залежностей (1), які автоматично задовільняють рівняння рівноваги (5).

Допустимо, що ми маємо результати спостережень за просіданням фундаментної плити споруди, які проводяться по достатньо густій, хоча, в загальному випадку, не обов'язково регулярній сітці точок.

За допомогою стандартних програмних засобів оптимально апроксимуємо результати спостережень з тим, щоб перейти до регулярної сітки значень осідань реперів вузлах сітки - z_{ij} .

Ефективного рішення цієї частини задачі можна добитись тільки при прогнозуванні за результатами спостережень положення структурних ліній рельєфу поверхонь, що деформуються (1) і згущені при подальших спостереженнях в х зонах цих ліній сітки спостережуваних точок. Це стосується і того випадку, коли для апроксимації ми користуємося такими сучасними засобами, як програмний комплекс SERFER фірми Golden Software IC.

Виходячи з наявної інформації, вектор переміщень точок січення, на якому розміщені спостережувані репери - ω , задамо вигляді

$$\omega = (u = 0; v = 0; \omega = \omega^*(x, y);) \quad (6)$$

де u, v, ω - переміщення по координатах x, y та z відповідно.

Вид функції ω^* будемо шукати в вигляді бікубічного поліному :

$$\begin{aligned} \omega^* = & Ax^3y^3 + Bx^2y^3 + Cxy^3 + Dy^3 + Ex^3y^2 + Gx^3y + Fx^3 + \\ & Hx^2y^2 + Ix^2y + Kx^2 + Lxy^2 + Mxy + Nx + Oy + Py^2 + R \end{aligned} \quad (7)$$

Визначимо по формулі (2) компоненти тензора деформацій. В нашому випадку вони мають вигляд :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 0; \varepsilon_{12} = 0; \varepsilon_{22} = 0; \varepsilon_{33} = 0; \\ \varepsilon_{13} &= 1/2(3Ax^2y^3 + 2Bxy^3 + Cy^3 + 3Ex^2y^2 + 3Gx^2y \\ &+ 3Fx^2 + 2Mxy^2 + 2Ixy + 2Kx + Ly^2 + My + N); \\ \varepsilon_{23} &= 1/2(3Ax^3y^2 + 3Bx^2y^2 + 3Cxy^2 + 3Dy^2 + 2Ex^3y \\ &+ 6x^3 + 2Hx^2y + Ix^2 + 2Lxy + Mx + 2Py + O); \end{aligned} \quad (8)$$

Звідси компоненти тензора напружень визначені з рівняння Гука (5) матимуть в свою чергу вигляд :

$$\begin{aligned} p^{11} &= 0; p^{22} = 0; p^{32} = 0; p^{12} = 0; \\ p^{23} &= 2\mu\varepsilon_{23}; p^{13} = 2\mu\varepsilon_{13}; \end{aligned} \quad (9)$$

Умови рівноваги (4) в декартовій системі координат залишуються в вигляді :

$$\begin{aligned} \partial p^{11}/\partial x + \partial p^{12}/\partial y + \partial p^{13}/\partial z &= 0; \\ \partial p^{21}/\partial x + \partial p^{22}/\partial y + \partial p^{23}/\partial z &= 0; \\ \partial p^{31}/\partial x + \partial p^{32}/\partial y + \partial p^{33}/\partial z &= 0; \end{aligned} \quad (10)$$

Оскільки перші два рівняння (10) не залежать від z , то вони виконуються тотожно і в нас з'являється можливість задати аналітичний вираз, який є розв'язком (10). Для цього розпишимо третє з рівнянь (10) з врахуванням (8) і (9) вигляді :

$$6Axy^3 + 2By^3 + 6Exy^2 + 6Gxy + 6Fx + 2Hy^2 + 2Iy + 2K + 6Ax^3y + 6Bx^2y + 6Exy + 6Dy + 2Ex^3 + 2Hx^2 + 2Lx + 2D = 0;$$

Звідки одержимо:

$$\begin{aligned} A &= 0; B = 0; H = 0; E = 0; G = -C; L = -3F; \\ I &= -3D; P = -K; \end{aligned} \quad (11)$$

Після цього залежність (7) можна записати в вигляді :

$$\begin{aligned} \omega^* = & C(xy^3 - x^3y) + D(y^3 - 3x^2y) + F(x^3 - 3xy^2) + \\ & K(x^2 - y^2) + Mxy + Nx + Oy + R \end{aligned} \quad (12)$$

В нашому випадку ми можемо скласти п рівняння виду (12), де n - кількість вузлів сітки. Тому є можливість знаходження 8-ми коефіцієнтів, що входять в рівняння (12) способом найменших квадратів. Ще раз відмітимо, що знайдені за допомогою цих коефіцієнтів значення тензорів деформацій і напружень по формулах (8) і (10) автоматично задовільняють умови рівноваги (4).

Знайдемо мінімум функції від 8 приведених вище змінних з виразу :

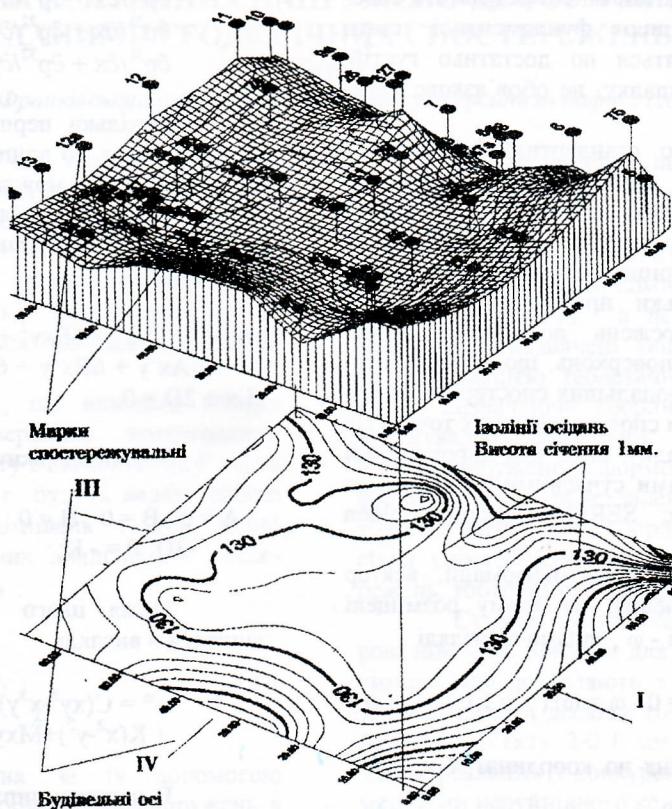
$$S(C; D; F; K; M; N; O; R) = \sum_{i=1}^{Nx} \sum_{j=1}^{Ny} (Z_{ij} - \omega^*)^2 \quad (13)$$

Використовуючи умови екстремуму для функції багатьох змінних, одержимо наступні рівняння :

$$\partial S / \partial C = 0 ,$$

або в координатному вигляді :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{Nx} \sum_{j=1}^{Ny} (Z_{ij} - C(x_i y_j^3 - x_i^3 y_j) - D(y_j^3 - 3x_i^2 y_j) - \\ - F(x_i^3 - 3x_i^2 y_j^2) - K(x_i^2 - y_j^2) - Mx_i y_j - Nx_i - Oy_j - R) * \\ * (x_i y_j^3 - x_i^3 y_j) = 0; \end{aligned} \quad (14)$$



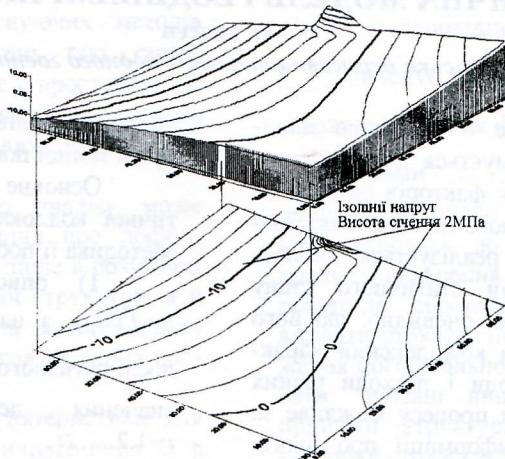


Рис.2. Результати оцінки напруженено-деформованого стану фундаментної плити (компонента R_{xz} тензора напруг)

стану фундаментної плити одного з реакторних відділень АЕС. План та аксонометрична поверхня моделі (1) деформованої поверхні плити побудованої за матеріалами геодезичних спостережень 1983-1996 р.р. приведені на рис.1. На цих матеріалах чітко прослідковується наявність аномальних зон осідання в р-ні реперів 5, 6а, 7, 8, тому об'єктивна оцінка експлуатаційної надійності об'єкту неможлива без оцінки напружень в цих зонах. При розрахунках приймали $\sigma = 0.15$ і $E = 2.43 \times 10^{10}$ Па. Одержані результати ілюструються на рис.2. Аналіз його

показує, що в фундаментній плиті блоку присутні напруги розтягу, але навіть в аномальних зонах їх величини в р-ні 20 Мпа, що відповідає пружному згину і виключає появу тріщин. Оскільки аномальні зони осідань в р-ні реперів 5,6а,7,8 утворились ще в 1985 р. практично не змінюються, а сама фундаментна плита рівномірно осідає з швидкістю, яка за останні два роки становить 3 мм. на рік, то все це дає можливість заключити, що експлуатаційна надійність фундаменту РВ безсумнівна.

K.Burak

PROGNOZ OF INTENSIVE DEFORMED ZONES AS THE RESULT OF GEODETIC OBSERVATIONS

Summary

The possibility of determination of tensor components of internal stress is shown on the basis of modern of mechanic models of solid medium. The solution came into use thank to formulas of covariant differentiation of displacement vector is received by approximation of geodetic dimension. The formulas for high-exact geometrical levelling are reduced to coordinate kind. Here is given the example of calculation of stresses of foundation plate.

К.Бурак

ПРОГНОЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЗОН ПО ДАННЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ

Резюме

На основании современных моделей механики сплошной среды показана возможность определения компонент тензора внутренних напряжений. Решение получено с использованием формул ковариантного дифференцирования векторов перемещений, величины которых определены аппроксимированием результатов геодезических измерений деформаций. Для частного случая, наблюдений за оседанием формулы приведены к координатному виду. Дан пример расчета напряжений фундаментной плиты.