УДК 528.21/22

Н. Ф. АГЕЕВ

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ НЕУРОВЕННОГО ЭЛЛИПСОИДА

В статье [1] предложены нетрадиционное определение Нормальной Земли и метод ее построения. Под Нормальной Землей с ее традиционной геометрией (общеземной референц-эллипсоид GRS-80 [2], наилучшим образом аппроксимирующий геоид) понимается эллипсоид вращения E *неуровенный*, на котором сила тяжести полагается известной по совокупности уже выполненных измерений. А внешнее гравитационное («нормальное») поле определяют из решения задачи Неймана (внешней): вне эллипсоида E находят гармоническую функцию U, регулярную на бесконечности. При этом, как уже отмечено, ее нормальная производная $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ полагается на E известной.

По этой методике выполнен счет «нормальных» значений ускорения силы тяжести над неуровенным эллипсоидом. Краевое условие во второй граничной задаче задано численно: это 1654 значения ускорений силы тяжести g_E [3], отнесенных к центрам $5\times5°$ трапеций и предварительно редуцированных с геоида на принятый эллипсоид.

Краевое условие выражается формулой (6) из [1]:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_E = f(\Theta,\lambda) = \left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_E - \frac{ab\,\omega^2 \sin^2\Theta}{\sqrt{b^2 + c^2\cos^2\Theta}}, \tag{1}$$

где

$$-\left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_E = g_E(\Theta,\lambda).$$

Для вычисления коэффициентов A_{nm} и B_{nm} разложения по сферическим гармоникам вспомогательной функции

$$F(\Theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda)\,P_{nm}(\cos\Theta) \tag{2}$$

воспользуемся методом наименьших квадратов. Эта функция имеет вид

$$F(\Theta,\lambda) = \sqrt{a^2\cos^2\Theta + b^2\sin^2\Theta}\cdot f(\Theta,\lambda), \tag{3}$$

где a и b — полуоси эллипсоида E; θ и λ — координаты тех точек на его поверхности, в которых известны значения g_E.

Отыскание неизвестных коэффициентов A_{nm} и B_{nm} в (2) сводится к решению системы линейных уравнений

$$Z=AX, \tag{4}$$

где Z — матрица-столбец вычисленных по (3) значений функции $F(\theta, \lambda)$; A — прямоугольная матрица, элементами которой являются сферические гармоники $P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda$ и $P_{nm}\times$ $\times(\cos 0)\sin m\lambda$; X — матрица-столбец определяемых гармонических коэффициентов A_{nm} и B_{nm}. Эти коэффициенты находим из решения (4) при условии метода наименьших квадратов

$$[vv]=\min, \quad V=(v_1, v_2, \cdots, v_{(N+1)^2})^T, \tag{5}$$

где $V=AX-Z$, а

$$X=(A^TA)^{-1}(A^TZ). \tag{6}$$

Мы имеем 1654 значения функции $F(\theta, \lambda)$, которые соответствуют центрам равновеликих $5\times5°$ трапеций на земной поверхности. Следовательно, исходная система (4) состоит из 1654 условных уравнений, количество же неизвестных дает формула $(N+1)^2$, где N — максимальный порядок разложения функции $F(\theta, \lambda)$.

Описанным образом получено несколько наборов коэффициентов A_{nm} и B_{nm} различной степени усечения ряда (2) ($N=$ $=4$, 6, 8, 10, 12), что соответствует обобщенным площадкам на поверхности эллипсоида со сторонами в 45; 30; 22,5; 18 и 15°. Дальнейшее повышение порядка разложения N затрудняется в связи с резким увеличением времени счета на ЭВМ (при переходе от порядка к порядку).

Имея наборы коэффициентов A_{nm} и B_{nm}, по (9) из [1] вычисляем далее «нормальное» ускорение $\frac{\partial W}{\partial n}$ силы тяжести в произвольной точке вне заданного эллипсоида:

$$\frac{\partial W}{\partial n}=\frac{\partial U}{\partial n}+\frac{c\omega^2}{2}\frac{\operatorname{sh}2\eta\sin^2\Theta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\cos^2\Theta}}, \tag{7}$$

где

$$\frac{\partial U}{\partial n}=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\left.\begin{matrix}A_{nm}\\B_{nm}\end{matrix}\right\}\times$$

$$\times\frac{a\left[Q_n^{m+1}(i\operatorname{sh}\eta)+m\operatorname{th}\eta\, Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta)\right]P_n^m(\cos\Theta)}{c\left[aQ_n^{m+1}(i\operatorname{sh}\eta_0)+mbQ_n^m(i\operatorname{sh}\eta_0)\right]\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\cos^2\Theta}}\left\{\begin{matrix}\cos m\lambda\\ \sin m\lambda\end{matrix}\right. .$$

В таблице приведены результаты счета «нормальных» значений ускорения силы тяжести и аномалий Δg в двух высоко расположенных точках земной поверхности с измеренной в них силой тяжести g.

Из таблицы видно естественное уменьшение аномалий Δg при $N=4$, 6, 8. А их увеличение при последующих N, с одной стороны, отражает замену непрерывного поля дискретным-осредненным, а с другой, показывает, в частности, необходимость использования более полной информации о внешнем гравитационном поле, т. е. замену пятиградусных аномалий силы тяжести одноградусными.

Полученное нетрадиционное нормальное поле можно использовать в космической геодезии при счете орбит ИСЗ. Это подтверждают приведенные ниже значения «нормального» ус-

Ускорения силы тяжести и аномалии Δg в исследуемых точках

	$H=3770$ м		$H=4170$ м	
	$g=978919\cdot10^{-5}$ м·с$^{-2}$		$g=978747\cdot10^{-5}$ м·с$^{-2}$	
N	$\frac{\partial W}{\partial n}$, 10^{-5} м·с$^{-2}$	Δg, 10^{-5} м·с$^{-2}$	$\frac{\partial W}{\partial n}$, 10^{-5} м·с$^{-2}$	Δg, 10^{-5} м·с$^{-2}$
4	978858,11	60,89	978663,91	83,09
6	978864,70	54,30	978668,48	78,52
8	978873,91	45,09	978679,22	67,78
10	978870,19	48,81	798677,61	69,39
12	978861,51	57,49	978669,58	77,42

корения силы тяжести, вычисленные для тех же точек, что и в таблице, но на высоте $H=6371$ км, т. е. соизмеримой с радиусом Земли и соответствующей орбите ИСЗ «Lageos». Так, в первой точке при $N=4$, 6, 8, 10 сила притяжения $\frac{\partial U}{\partial n}$ соответственно равна 2,4552664; 2,4552667; 2,4552668; 2,4552668 м·с$^{-2}$; во второй точке тем же N соответствуют следующие значения $\frac{\partial U}{\partial n}$: 2,4553376; 2,4553380; 2,4553381; 2,4553381 м·с$^{-2}$. Таким образом, при $N\geqslant6$ значения $\frac{\partial U}{\partial n}$, вычисляемые с точностью 10^{-7} м·с$^{-2}$, остаются неизменными. Следовательно, используя нетрадиционное нормальное поле шестого порядка, а может быть, и четвертого, можно довольно просто вычислять правые части уравнений движения спутников.

1. *Мещеряков Г. А.* О нетрадиционном подходе к установлению Нормальной Земли // Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1988. Вып. 48. С. 50—54. 2. *Moritz H.* Geodetic Reference System 1980 — in the Geodesist's Handbook 1980 // Bulletin Geodesique. 1980. V. 54. N 3. P. 395—405. 3. *Rapp R. H.* Potential coefficient determinations from 5° terrestrial gravity data // Rp. Depart. Geod. Sc. Ohio St. Univ. 1977. N 251. P. 77.

Статья поступила в редколлегию 10. 02. 89