УДК 528.11

Бліндер Ю.
Волинський державний університет імені Лесі Українки (Україна)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЕРТИКАЛЬНОЇ МІГРАЦІЇ РАДІОНУКЛІДІВ У ҐРУНТІ

Предложена оригинальная математическая модель вертикальной миграции радионуклидов в почве и получено решение модели для определенных условий. Характер вертикальной миграции радионуклидов иллюстрируется на основе данных цифрового примера.

The original mathematical model of vertical migration of radionuclides in soil is offered and a model solution for determine conditions is obtained. On the basis of datas of a numerical example the character of vertical migration radionuclides is illustrated.

Аварія на Чорнобильській атомній електростанції, що сталася 26 квітня 1986 року, призвела до радіоактивного забруднення великих територій, які відрізняються значною різноманітністю типів ґрунтів, кліматичними і ландшафтними особливостями, що створює надзвичайно високу варіабельність радіаційної ситуації та її динаміки.

Внаслідок радіоактивного забруднення виведені з режиму нормального користування найважливіші компоненти природних ресурсів постраждалих регіонів України – сільськогосподарські угіддя і ліси, що призвело до різкої трансформації умов звичної господарської діяльності і традиційного життєвого укладу людей в зоні впливу аварії на ЧАЕС.

В умовах, що склалися, особливу значимість набуває проблема вдосконалення системи радіаційного захисту, яка спрямована на зменшення доз опромінення населення, а також на відновлення господарської цінності забруднених територій.

Оскільки спектр радіоактивних випадань включає значну частку довгоживучих радіоізотопів (цезію, стронцію, плутонію), методологія оптимізації системи радіаційного захисту повинна ґрунтуватися на даних, що характеризують як поточний стан радіаційної ситуації в забруднених регіонах, так і перспективні оцінки її розвитку. В зв'язку з цим актуальною є задача математично обґрунтованого вивчення закономірностей динаміки радіаційної, ситуації та її прогнозування. Цьому питанню і присвячується дна стаття.

Безпосередній вплив на міграцію радіонуклідів (РН) по ґрунтовому профілю та їх зникнення з ґрунту мають процеси вимивання хімічних речовин зі стоком води. В роботах ряду авторів [7, 8] розглядаються процеси дифузії і конвективної дисперсії, механізм витиснення, приводяться математичні рішення рівнянь гідродинамічної дисперсії; при цьому особлива увага приділяється моделюванню міграції РН [3, 6].

Інтерпретація процесів поведінки хімічних сполук у ґрунті отримала найбільшу реалізацію в математичних моделях масопереносу і обміну, що включають конвективний і дифузійний перенос РН, а також їх сорбцію, розчинення і розклад при фільтрації розчину в ґрунті. Одна з найбільш простих реалізацій визначається рівняннями (Вергунова І.М., Гайдук О.В., Душейко П.Г., 2002):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta C)+\rho(1-\theta)\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial}{\partial z}(\theta C)-w\theta C\right)-f_1(\theta C)+k_1(\theta(C_H-C)); \qquad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=f_2(S, C), \qquad (2)$$

де $C=C(x, t)$ - концентрація РН в рухомому поровому розчині (ML^{-3}) на глибині $z(L)$ в момент часу $t(T)$, w – швидкість пересування порового розчину (LT^{-1}) в напрямку зміни z, D – ефективний коефіцієнт дифузії РН в ґрунті (L^2T^{-1}), $D=D_0+D_g$, де D_0 – коефіцієнт молекулярної дифузії РН в ґрунті (L^2T^{-1}); D_g – коефіцієнт гідродинамічної дисперсії (L^2T^{-1});

ρ – об'ємна щільність грунтового поглинаючого комплексу (ML^{-3});

θ – об'ємний вміст рухомої вологості в ґрунті (L^3L^{-3});

$S=S(z, t)$ – питома сорбція РН рухомим поглинаючим комплексом (MM^{-1}) на глибині z в момент часу t; $f_1(\theta C)$, $f_2(\theta C)$ і $k_1(\theta(C_H-C))$ - функції, що визначають

відповідно швидкості розкладу $(ML^{-3}T^{-1})$ сорбції $(MM^{-1}T^{-1})$ і розчинення $(ML^{-3}T^{-1})$ РН ґрунтовим поглинаючим комплексом; C_H – концентрація насичення (ML^{-3}).

Отримання рівнянь (1)-(2) базується на наступних теоретичних припущеннях:

- Ґрунт являє собою гетерогенне пористе середовище, яке складається з ґрунтового скелету і порового об'єму, що містить ґрунтову вологість (рухому її частину і нерухому, зв'язану зі скелетом ґрунту). Ґрунтовий скелет зі зв'язаною вологістю визначає ґрунтовий комплекс (сорбуюча фаза).
- Переміщення РН в ґрунті здійснюється переміщенням рухомої вологості (вільна фаза) і визначається гідрофізичними і фізико-хімічними характеристиками ґрунту і самих РН, такими, як рухомий поровий об'єм, об'ємна щільність, фільтраційна і сорбційна здатність ґрунту, здатність РН до розкладу.
- Конвективний і дифузійний переноси РН визначаються відповідними потоками РН

$$I_{конв.}=w\theta C; \qquad I_{диф.}=-D\frac{\partial(\theta C)}{\partial z}.$$

Тут $I_{конв.}$ і $I_{диф.}$ представляють маси РН, що проходять в напрямку z через одиницю площі ґрунту за одиницю часу при конвективному і дифузійному переносі РН. Через суттєву трудність розділення цих двох потоків надалі розглядається сумарний ефект від дифузійного і конвективного переносу, що визначається ефективним коефіцієнтом дифузії.

Подібний підхід найбільш доступний при розробці моделей, що описують вертикальну міграцію РН в ґрунті. Проте обмежує використання пропонованих моделей необхідність одержання основних параметрів у рівняннях емпіричним шляхом. Тому потрібний спрощений розв'язок.

Припустимо, що задача (1)-(2) має вигляд:

$$R\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - w\frac{\partial C}{\partial z} \qquad (3)$$

де C, z, t, w, D, ρ – ті ж, що і у рівнянні (1); $R = 1 + \rho\beta N\frac{1-\theta}{\theta}C^{N-1}\left(N-1,\qquad R = 1 + \rho k_d\frac{1-\theta}{\theta}\right)$ – коефіцієнт, що характеризує запізнення у переміщенні та розподілі РН у ґрунті, яке визначається сорбційними властивостями ґрунту, β, N і k_d – постійні, які розраховуються емпірично на основі даних лабораторного експерименту по вивченню сорбції РН в типовому ґрунті [3].

Рівняння (3) через нелінійність відносно *C* неможливо розв'язати аналітичним шляхом. Тому необхідно скористатися наближеним методом розв'язку аналогічних рівнянь, яким є метод прогонки [4, 5] і який нами застосований.

Виділимо в рухомому суцільному нестисливому середовищі обмежену зв'язну область Ω точок евклідового простору R^n і припустимо, що рух РН як часток усього середовища описується відомим вектором швидкості $W = \{w_i(z, t)\}$, де t – змінна часу $0 < t < T < +\infty$.

Припустимо також, що необхідно розв'язати задачу Діріхле для тривимірного рівняння Лапласа в циліндричній області:

$$\Delta U = 0, \quad 0 < z < L, \quad 0 < \quad \le 2\pi \qquad (4)$$

з граничними умовами

$$U(z, r, \ + 2\pi) = U(z, r, \ ),$$
$$\frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{r=R} = 0 \quad \text{або} \quad U\big|_{r=R} = U_0(z, \ ) \qquad (5)$$

Остання умова записується у випадку лінійної апроксимації і може бути замінена умовою

$$\frac{\partial U}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0 \quad . \qquad (6)$$

Розв'язок задачі Діріхле проводиться методом встановлення, у відповідності з яким робиться перехід від стаціонарного рівняння (рівняння Лапласа) до нестаціонарного

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \Delta U, \quad t > 0 \qquad (7)$$

із заданим початковим наближенням

$$U\big|_{t=0} = \widetilde{U}(z, r, \varphi) \quad . \qquad (8)$$

Для розв'язку поставленої задачі записується неявна різницева схема

$$\frac{\left(\widetilde{U} - U\right)}{\tau} = \Lambda\widetilde{U}, \qquad (9)$$

де $\tau > 0$ – ітераційний параметр, $\widetilde{U} = U(t + \tau, z, r, \ )$, $U = U(t, z, r, \ )$;

Λ – різницевий аналог оператора Лапласа [4], записаний на нерівномірній сітці

$$\Omega_r = \{r_i = (i + 0.5)h_r, \qquad i = 0 \div N_r, \qquad h_r = R/(N_i + 0.5)\},$$
$$\Omega_z = \{z_k = z_{k-1} + h_z, \qquad k = 1 \div N_z\}, \qquad (10)$$
$$\Omega = \{\ _l = \ _{l-1} + h, \quad l = 1 \div N \ \}.$$

Рівняння (9) розв'язується методом сумарної апроксимації. В цьому випадку замість (9) отримуємо такі три задачі:

$$\begin{aligned} \left(\overline{U}-U\right)/\tau &= \Lambda_r \overline{U}, \\ \left(\widetilde{U}-\overline{U}\right)/\tau &= \Lambda_z \widetilde{U}, \\ \left(\widetilde{\widetilde{U}}-\widetilde{U}\right)\Big/\tau &= \Lambda\ \widetilde{U} \end{aligned} \qquad (11)$$

де $\overline{U} = U(t+\tau/3, z, r,\ ),\ \widetilde{U} = U(t+2\tau/3, z, r,\ ),\ \widetilde{\widetilde{U}} = U(t+\tau, z, r,\ )$

(12)

$\Lambda_r, \Lambda_z, \Lambda$ – різницеві аналоги оператора Лапласа за відповідною координатою. Для збіжності ітераційного процесу параметр τ вибирається за наступної умови:

$$\tau \le 0.5 \min\left\{h_z^2, h^2, h_r^2\right\}. \qquad (13)$$

Визначення одномірних операторів здійснюється методом прогонки для координат z,r і методом циклічної прогонки для координати ψ.

Необхідні для отримання чисельних результатів конкретні значення коефіцієнта $\sigma = \sigma(z) \ge 0$ біохімічного розпаду РН; коефіцієнта взаємодії з контактуючим середовищем $\alpha = \alpha(z) \ge 0$; $f = f(z,t)$ та $\psi = \psi(z,t)$ – інтенсивностей джерел РН, розподілених в області Ω та на межі $\partial\Omega$ відповідно; ψ_0 – заданий розподіл РН в області Ω в початковий момент часу нами були використані з роботи [2].

Отриманий розв'язок має наступний вигляд.

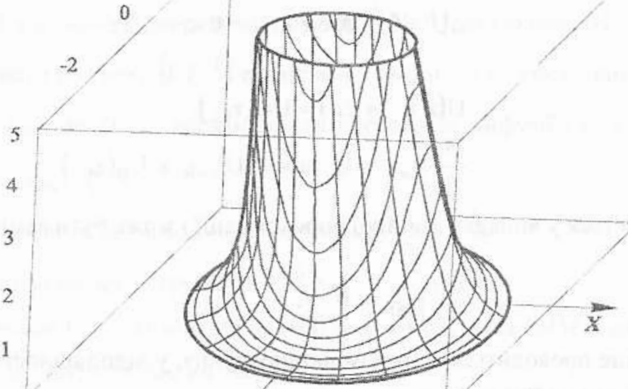

Рис.1. Графічне відображення вертикальної міграції РН в ґрунті.

Література

1. Вергунова І.М., Гайдук О.В., Душейко П.Г. Дослідження деяких задач масопереносу ^{137}Cs. // Дев'ята міжнародна наукова конференція ім. акад. М.Кравчука. - Київ, 2002.- С.40-41.
2. Комариков И.Ю. Динамика и прогноз миграции радионуклидов в окружающей среде на территориях, загрязненных в результате аварии на ЧАЭС // Автореферат дисс. канд. техн. наук. - Киев, 1994. - 21 с.
3. Поспеев В.Е., Овчинникова З.Г. Математические модели распределения и перемещения пиклорама в почве // Почвоведение, 1992. - №9. -с.145-151.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем М.: Наука, 1977.
5. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. -М.: Наука, 1977.
6. Biggar J.W. Pesticide movement in soil water // Pesticides in the soil: Ecologi, Degradation and Movement Proceedings of the Symposium at Michigan state University. Easr Lansing. - 1970. - P. 107-119.
7. Cenucten van M.Th. Non-equilibrium transport parameters from miscible displacement experiments // Res. Report. Salinity Laboratory. 1981. – №119. - Rereside. CA. 88 p.
8. Leistra M. A model for the transport of pesticides in soil with diffusion controlled raster of adsorption and desorption // Agr. and Environ. 1977. - V.3.-№4.-P. 325-335.