УДК 528

ДВУЛІТ П.Д.
Національний університет " Львівська політехніка"

ГЕОДЕЗИЧНА ГРАНИЧНА ЗАДАЧА І GPS ВИМІРИ

Рассматривается решение геодезической краевой задачи от Стокса, Молоденского и до современного состояния решения этой важной проблемы. Приведены формулы для вычисления гравиметрических составляющих уклонений отвесных линий и аномалий высот в пунктах физической поверхности Земли с использованием теории Молоденского, аналитического продолжения на сферу с помощью рядов Тейлора, измеренных чистых аномалий силы тяжести и GPS измерений.

The development of geodetic boundary value problem from Stokes, Molodensky, etc. to a modern state of the solution of GPS boundary value problem is discussed. The correspondent formulas for computations of the gravimetric deflections of the vertical, height anomaly at the points on the Earth surface are based on the Molodensky theory, downward continuation at the level of the studying point, and observed gravity disturbances via GPS measurements.

Постановка проблеми. Важливими теоретичними роботами з визначення геоїда за гравіметричними даними є дослідження Стокса [10], який отримав розв'язок цієї задачі у вигляді ряду або інтегральної формули. Теорія Стокса поставила перед геодезією дві проблеми : проблему регуляризації геоїда - зовнішньої рівневої поверхні і редукційну проблему-приведення прискорення сили ваги з фізичної поверхні Землі на поверхню регуляризованого геоїда. Складні проблеми регуляризації Землі і редукування прискорення сили ваги, а також незнання детального закону про зміну густини мас не дають можливості принципово строго розв'язати задачу Стокса. Тому розв'язок Стокса і його послідовників є наближеним розв'язком задачі визначення фігури та зовнішнього поля Землі. Подальші дослідження вчених у XIX і XX століттях були направлені на усунення деяких істотних недоліків в теорії Стокса, що безумовно сприяло впровадженню їх результатів в геодезичне виробництво.

Задача визначення фігури Землі та її зовнішнього гравітаційного потенціалу була поставлена і строго вирішена Молоденським в 1945 році [3]. Він принципово строго розв'язав проблему визначення аномального потенціалу Землі та її поверхні за виміряними на ній аномаліями прискорення сили ваги. Це дає можливість знайти відступи реальної фізичної поверхні Землі від прийнятої фігури порівняння - рівневого еліпсоїда обертання. Практичне використання гравіметричних даних у XX столітті показало, що в гірській місцевості теорія Стокса приводить до недостатньо точних результатів, а використання теорії Молоденського дає можливість визначати аномальний потенціал і фізичну поверхню Землі з похибками 0,1 $м^2 c^{-2}$ і 0,01 м відповідно [5].

Нові досягнення в розв'язку геодезичних граничних задач з використанням техніки GPS для визначення фізичної поверхні Землі з високою точністю дають можливість переглянути по-сучасному підхід для безпосереднього визначення потенціала, замінюючи нівелювання. Отже, в роботі розглядаються різні геодезичні граничні задачі від Стокса, Молоденського і до сьогоднішнього стану вирішення цієї проблеми.

Зв'язок з важливими науковими і практичними завданнями. Сучасне визначення аномального потенціалу Землі пов'язано з розв'язком геодезичної граничної задачі в точках фізичної поверхні Землі, яка є відомою із GPS вимірів. У свою чергу через аномальний потенціал можна отримати інші важливі характеристики гравітаційного поля, а саме висоту квазігеоїда і гравіметричні складові відхилень прямовисних ліній. Уточнення розв'язку геодезичної граничної задачі і уточнення обчислень характеристик гравітаційного поля завжди привертає увагу багатьох геодезистів, бо ці дослідження направлені на вирішення основної наукової задачі - визначення фігури та зовнішнього гравітаційного поля Землі з відповідною точністю сучасного рівня. Достатньо відзначити симпозіум "Геоїд і розв'язок геодезичної граничної задачі" (Генеральна асамблея Міжнародного геодезичного і геофізичного союзу, Боулдер , США, липень 1995 р.), на якому повідомлялось про обчислення поверхні квазігеоїда для Європи, США і Китаю з точністю 1- 5 см на відстані 10- 100 км і 5 - 20 см на відстані до 10000 км [9].

Аналіз досліджень та публікацій, присвячених розв'язанню даної проблеми. Як відомо, геодезична гранична задача полягає у визначенні фізичної поверхні Землі за даними на цій поверхні вектора прискорення вільного падіння g та гравітаційного потенціалу W. Для цього необхідно знайти граничну умову, якій повинен задовольняти аномальний потенціал $T=W-U$ (W-реальний потенціал, U-нормальний потенціал) в точках фізичної поверхні Землі. Тут можливі два варіанти. В першому варіанті розглядається спрощена модель Землі, тобто приймається, що фізична поверхня Землі співпадає з рівнем моря і є рівневою поверхнею - геоїдом. Цей варіант був розглянутий Стоксом і ним поверхня геоїда прийнята за поверхню сфери радіуса R [4]. Гранична умова для задачі Стокса має вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial R}+\frac{2T}{R}=-(g_M-\gamma_N), \qquad (1)$$

де (g_M-g_N) - змішана аномалія прискорення сили ваги. Задача Стокса є граничною задачею: на поверхні сфери задані змішані аномалії прискорення сили ваги і необхідно визначити аномальний потенціал T на ній і зовні поверхні сфери, приймаючи, що зовні сфери він є функцією гармонійною. В другому варіанті гранична умова, якій аномальний потенціал T задовольняв би в точках фізичної поверхні Землі, відноситься до поверхні Землі у першому наближенні (теллуроїд). Цю поверхню можна побудувати, якщо від поверхні рівневого еліпсоїда відкласти нормальні висоти H^γ (див. рис. 1).

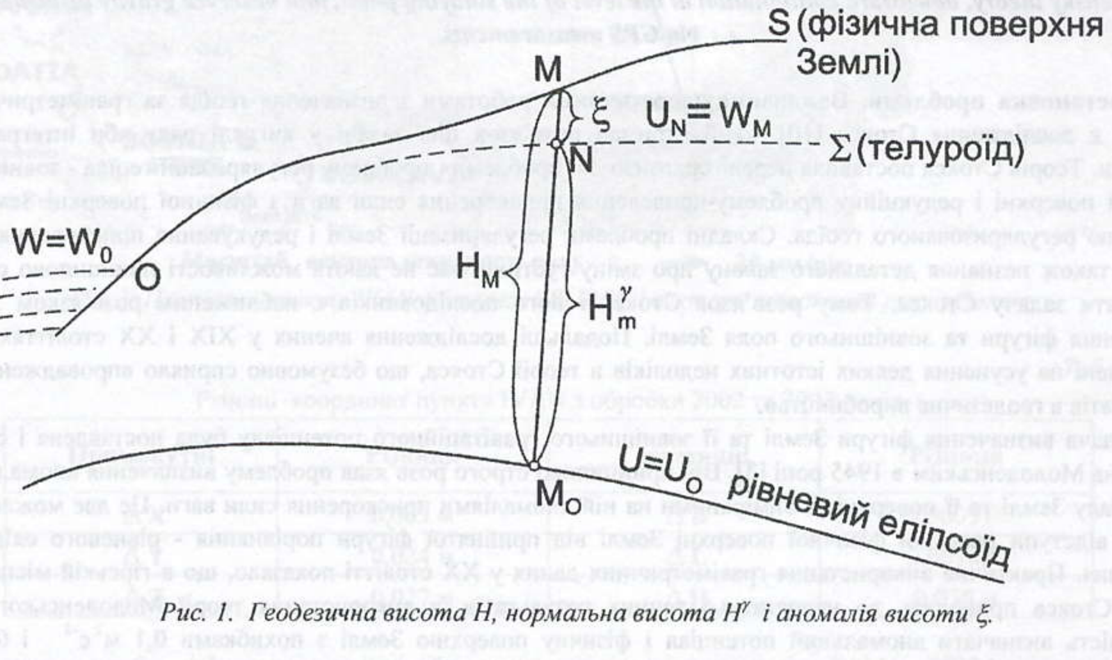

Рис. 1. Геодезична висота H, нормальна висота H^γ і аномалія висоти ξ.

Задачу, поставлену і обгрунтувану Молоденським [3], можна сформулювати так: за виміряними на земній поверхні значеннями прискорення вільного падіння g і приростами його потенціалу $W - Wo$ визначити поверхню Землі S та її зовнішній гравітаційний потенціал W, якщо відомі потенціал відцентрової сили і маса Землі або відстань між двома віддаленими точками. Вихідними даними в граничній геодезичній задачі Молоденського можуть бути змішані аномалії прискорення сили ваги на суходолі і чисті на морській поверхні. Відповідна гранична умова задачі Молоденського має вигляд

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_H \frac{1}{\gamma_m}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_N T_N=-g_M+\gamma_N-\frac{1}{\gamma_m}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_N (W_0-U_0), \qquad (2)$$

де Wo - значення дійсного потенціалу прискорення сили ваги у вихідному пункті нівелювання О; Uo - значення нормального потенціалу прискорення сили ваги на поверхні рівневого еліпсоїда обертання. Тут у формулі (2) зміст відповідних величин пояснює рис. 1.

Середнє значення нормального прискорення сили ваги на відрізку MM_0, яке входить у (2), обчислюють за формулою

$$\gamma_m=\gamma_e\left(1+\beta \sin^2 B-\beta_1 \sin^2 2B\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma}{\partial H}H^\gamma \qquad (3)$$

З математичної точки зору задача Стокса як класичний метод дослідження фігури Землі має певні труднощі. Це перш за все те, що всі вимірювання повинні бути виконані на геоїді. Але геодезичні вимірювання виконують на топографічній або фізичній поверхні Землі. Отже, виникає необхідність редукування вимірювань на реальній поверхні до рівня моря, тобто до геоїда А для цього повинна бути відома густина розподілу мас між фізичною поверхнею Землі і геоїдом, яку неможливо визначити із спостережень. Задача визначення фігури Землі та її зовнішнього гравітаційного потенціалу, що безпосередньо цікавить геодезію, як вже відзначалось раніше, була строго поставлена і розв'язана Молоденським. В роботі [6] відзначається, що значимість теорії Молоденського полягає у підході і значенні фізичної поверхні Землі S. Сьогодні цю поверхню можна безпосередньо визначати геометричним шляхом, використовуючи супутникові глобальні навігаційні системи типу GPS і Глонасс. У даний час з'явилась можливість використання підходу Молоденського для безпосереднього визначення потенціалу W, замінюючи геометричне нівелювання. Використовуючи GPS, можна розглядати S як поверхню відому і в цьому випадку W визначають із співвідношення

$$W = F_1(S, g), \tag{4}$$

де S - відома фізична поверхня Землі із спостережень GPS вимірів; g - виміряне значення прискорення сили ваги на поверхні S. Формула (4) розв'язує так звану фіксовану граничну геодезичну задачу, коли гранична поверхня S є відомою. У випадку, коли граничну поверхню S треба визначити і вона є невідомою (вільною), то тоді

$$S = F_2(g, W), \tag{5}$$

де g *і* W задані на поверхні S. Фіксовані геодезичні граничні задачі вважаються простішими, ніж вільні. Нові досягнення в розв'язку геодезичних граничних задач передбачають дослідження розв'язків у вигляді рядів Молоденського, Бровара і інших та математичне дослідження питань існування і єдності цього розв'язку, які запропоновані Хьормандером, Крарупом і Сансо.

Теорія Молоденського зіткнулась з певними труднощами при їх практичному використанні, і тому намітились два напрями цієї проблеми, а саме: одні дослідники дають точний розв'язок цієї проблеми, а другі - наближений, тобто близький розв'язок до точного. Дослідники першого напрямку вважають, що граничні значення є заданими неперервними функціями на фізичній поверхні Землі і розв'язок представляють у вигляді розкладу різних виразів для аномального потенціалу T за малим параметром κ. Молоденський для вирішення геодезичної граничної задачі складає основне інтегральне рівняння, в якому аномальний потенціал Землі T представляє у вигляді потенціалу простого шару [4]. Бровар показав, що розв'язок геодезичних граничних задач можна звести до розв'язку одного інтегрального рівняння для визначення густини простого шару [1]. Він запропонував новий розв'язок першої зовнішньої граничної задачі для довільної граничної поверхні, яка є близькою до сфери. Пеллінен відзначив певний інтерес до розв'язку граничної задачі Молоденського з врахуванням земного стиснення з використанням супутникової альтиметрії [7,8]. Новий метод розв'язку задачі Молоденського запропонував Марич [2]. Замість складання і розв'язку інтегрального рівняння Марич використовує залежність між розкладом аномалій прискорення сили ваги і аномального потенціалу в ряд Тейлора за степенями висот рельєфу Землі H. Ним розв'язана геодезична гранична задача з врахуванням стиснення Землі, використовуючи метод розкладу за степенями малого параметру к Молоденського і шукає розв'язок з відносною помилкою порядку квадрата стиснення. Розв'язок у вигляді повного ряду, отриманого в термінах малого параметра, одночасно і незалежно розробили Марич і Моріц [10]. Моріц запропонував загальні рекурентні формули з перевіркою еквівалентності їх з рядами Молоденського, використовуючи теорію асимптотичних рядів [5]. Хьормендер [9] довів теорему, що дає математично строгі результати відносно існування та єдності розв'язку задачі Молоденського. Новий оригінальний і простий підхід до вивчення геодезичної граничної задачі запропонував Сансо [6]. Шляхом перетворення Лежандра вільна геодезична гранична задача перетворюється у фіксовану геодезичну граничну задачу. Строгу лінеаризацію задачі Молоденського виконав Крауп [11].

У роботі [6], яка була опублікована в російському перекладі з передмовою перекладача М. І.Юркиної, розглядається сферичний розв'язок задачі Молоденського і GPS для земної поверхні. Тут використовується ідея, що задані на земній поверхні S змішані або чисті аномалії прискорення сили ваги можна привести або аналітично продовжити до рівневої поверхні досліджуваної точки (див. рис. 2).

Не вдаючись у детальні викладки [6], приведемо основні формули для обчислення висот квазігеоїда (аномалії висоти) та гравіметричних складових відхилень прямовисних ліній в точках фізичної поверхні Землі. Треба відзначити, що в них використовуються формули Неймана – Коха [12] замість класичної формули Стокса і відповідно перетворені формули Венінга - Мейнеса у випадку граничної задачі GPS для чистих аномалій прискорення сили ваги. Тоді гранична умова для задачі GPS запишеться

$$\frac{\partial T}{\partial H} + \delta g = 0, \tag{6}$$

де $\delta g = (g_M - \gamma_M)$ - чиста аномалія прискорення сили ваги.

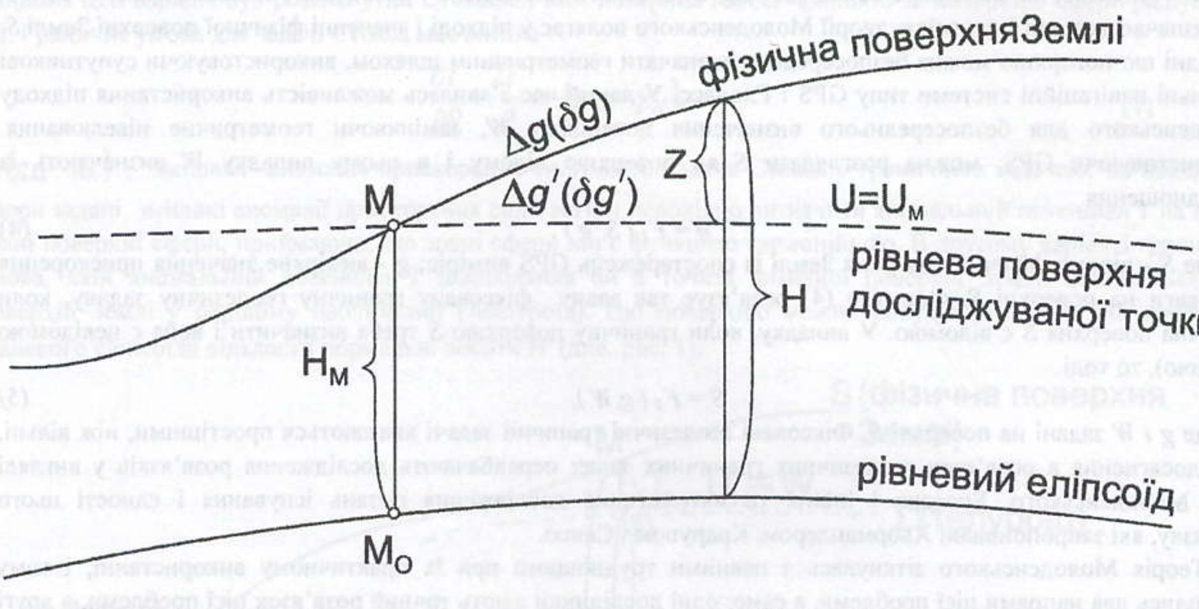

Рис.2. Аналітичне продовження від земної поверхні до досліджуваної точки

$$T = \frac{R}{4\pi}\iint_{\sigma} K(\psi)\delta g d\sigma, \tag{7}$$

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma} \delta g K(\psi) d\sigma + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma} g_n K(\psi) d\sigma, \tag{8}$$

$$\left\{\begin{matrix}\xi \\ \eta\end{matrix}\right\} = \frac{1}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma} \delta g \frac{dK}{d\psi}\left\{\begin{matrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{matrix}\right\} d\sigma + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma} g_n \frac{dK}{d\psi}\left\{\begin{matrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{matrix}\right\} d\sigma, \tag{9}$$

$$K(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n+1}P_n(cos\psi) = \frac{1}{sin\frac{\psi}{2}} - ln\left(1 + \frac{1}{sin\frac{\psi}{2}}\right), \tag{10}$$

$$\frac{dK}{d\psi} = -\frac{1}{2}\frac{cos\frac{\psi}{2}}{sin^2\frac{\psi}{2}}\frac{1}{1+sin\frac{\psi}{2}}, \tag{11}$$

$$g_n = -\sum_{r=1}^{n} z^r L_r(g_{n-r}) \tag{12}$$

В формулах (7-12):

T - аномальний або збурювальний потенціал у досліджуваній точці M, який визначають за формулою Неймана - Коха;

ζ - аномалія висоти, яку визначають за формулою Брунса;

ζ, η - гравіметричні складові відхилень прямовисних ліній в площині меридіана і першого вертикала;

δg - чиста аномалія прискорення сили ваги в біжучих точках рівневої поверхні досліджуваної точки;

$K(\psi)$ - функція Неймана - Коха;

γ - середня величина нормального прискорення сили ваги (наприклад 980 Гал);

g_n - поправочні члени, які обчислюються з допомогою рекурентного рівняння (12), починаючи з $g_0 = \delta g$;

$z = H - H_M$ - перевищення рельєфу поверхні Землі над рівневою поверхнею досліджуваної точки М;

L_n - поверхневий оператор або оператор вертикальної похідної чистих аномалій прискорення сили ваги.

Перспективи подальших досліджень та висновки. В сучасних умовах розвитку геодезії висоти квазігеоїда та складові відхилень прямовисних ліній як основні характеристики гравітаційного поля Землі треба визначати з точністю до десятих долей см і відповідно до десятих секунди дуги. Для вирішення цих задач актуальними залишається теорія Молоденського та розв'язок аналітичного продовження з допомогою рядів Тейлора і використання GPS вимірів. Представлені основні загальні обчислювальні формули необхідно привести до робочого вигляду.

З метою використання сучасних супутникових навігаційних систем і отримання відповідних чистих аномалій сили ваги в пунктах фізичної поверхні Землі необхідно розробити методику врахування впливу поля аномалій близьких та далеких зон на відповідні елементи зовнішнього гравітаційного поля Землі.

1. Бровар В. В. О решениях краевой задачи Молоденского.- « Известия вузов, « Геодезия и аэрофотосъемка », 1963, вып. 4, с. 129-137. 2. Марыч М.И. О решении задачи Молоденского при помощи ряда Тейлора. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1973, вып. 17, с. 26-33. 3. Молоденский М.С. Основные вопросы геодезической гравиметрии // Тр. ЦНИИГАиК. - 1945. - Вып. 45.- 17с. 4. Молоденский М.С., Еремеев В.Ф., Юркина М.И. Методы изучения внешнего гравитационного поля Земли // Тр. ЦНИИГАиК. - 1960. - Вып. 131. - 251с. 5. Мориц Г. Современная физическая геодезия. - М.: Недра, 1983. - 392 с. - Пер.с англ.изд. 1980г. 6.Мориц Г.Теория Молоденского и GPS (Памяти М. С. Молоденского)," Геодезия и картография ", 2001, №. - С. 7 - 17. 7. Пеллинен Л.П. Влияние топографических масс на вывод характеристик гравитационного поля Земли. - «Тр. ЦНИИГАиК», 1962, вып. 145, с. 23 - 42. 8. Пеллинен Л.П. Вопросы решения задачи Молоденского для поверхности морей й океанов // Тр. ЦНИИГАиК. 1982 № 233. С. 21 - 72. 9. Beck B.Symposium G-5: Thegeoid and the solution of the geodtnicboundary value problem // Zeitschrift fur Vermessungswesen. 1996. Bd. 121, №4. S. 163 - 165. 10. Heiskanen W. A., Moritz H. Physical geodesy. - San- Francisco - London: Freeman, 1967.-XI+364 p. 11. KrarupT. A contribution to the mathematical fondation of pfysical geodesy. - Geodaetisk inst. Meddele. - 1969. – 44.–80p. 12. Koch K. R. Die geodatische Randwertaufgabe bei bekannter Erdoberflache Zeitschrift fur Vermessungswesen – 96. – 1971. – 6. – s. 218 – 224.