

# АНТЕНИ ТА МІКРОХВИЛЬОВА ТЕХНІКА

УДК 004.932

Л. В. Касперська, Б. П. Русин  
Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України

## ВІДНОВЛЕННЯ ФОРМИ ДЖЕРЕЛА РОЗСІЮВАННЯ, ПОЛЕ ЯКОГО СПОТВОРЕНЕ ШУМОМ

© Касперська Л. В., Русин Б. П., 2017

Розглянуто задачу відновлення форми джерела розсіювання в однорідному середовищі. Вхідними даними цієї задачі є інформація про набір приймачів і виміряне ними розсіяне поле, спотворене шумом. Показано, що для її розв'язання необхідно відновити функцію двох змінних за її радоновим образом. За формою джерела розсіювання в роботі запропоновано новий підхід, за яким немає необхідності знати інформацію про далеке поле, а також про координати та кут, під яким джерело сигналу знаходиться відносно системи приймачів. Для запропонованого методу встановлено залежність точності відтворення перешкоди від кута повороту системи приймачів.

Ключові слова: фільтрована зворотна проекція, фільтр, шум, перетворення Фур'є, перетворення Радона, джерело розсіювання.

L. Kasperska, B. Rusyn  
Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine

## RECOVERING FORM OF THE SCATTERING SOURCE WHOSE FIELD IS DISTORTED BY THE NOISE

© Kasperska L., Rusyn B., 2017

Scattering signals is one of the basic natural processes, which is a consequence of energy losses and manifests in the form of variety of radiation what propagating in space. The cause of the scattering signal is the interaction with the environment. The result of this interaction is not only scattering but also weakening the signal.

On the one hand scattering is considered as a negative effect, but on the other – as a possible way for finding form of the scatterer of the signal.

Measuring the scattered field has a great practical importance, because the power of scattered field is usually much less than the power of field of the original signal. Moreover in the real condition always is present noise including the noise of the measuring devices.

In the paper we explored the problem of recovering form of the scattering source in the uniform environment. The input data of this problem is the information about a set of receivers and the measured scattering field distorted by the noise. We showed solving of this problem needs to recover the function of two variables for its radon image. The scientific novelty lies in the fact that unlike the known methods of restoring the form of the source of

scattering, a new approach is proposed in the work, in which it is not necessary to know the information about the distant field, as well as the coordinate and the angle at which the source of the signal relative to the receiver system is located.

For the proposed method established the dependence of the precision noise from the angle of rotation system receivers.

**Key words:** filtered back projection, filter, noise, Fourier transform, Radon transform, source scattering.

### Вступ

Розсіювання сигналів – один з основних природних процесів, що є наслідком втрат енергії і проявляється у вигляді різноманітного випромінювання, що поширюється в просторі. Причиною розсіювання є, насамперед, взаємодія сигналу з навколишнім середовищем. Наслідком цієї взаємодії є не лише розсіювання, а й послаблення сигналу. Це є значною проблемою в області передавання даних [1].

З одного боку, розсіювання розглядається як негативний ефект, з іншого – як можливий спосіб для знаходження форми розсіювача сигналу. Вирішення цих проблем покладено в основу теорії розсіювання.

Вимірювання розсіяного поля має велике практичне значення, оскільки потужність розсіяного поля зазвичай значно менша за потужність поля початкового сигналу. Крім того, в реальних умовах завжди присутній шум, зокрема, шум від самих пристроїв вимірювання.

Варіанти розв'язання такого типу задач запропоновано у роботі [2]. T. S. Angell, X. Jiang, and R. E. Kleinman розглядають задачу лише з однією падаючою хвилею і для розв'язку, тобто відновлення джерела потрібно приблизне уявлення про геометрію об'єкта. Для обчислення розсіяного поля використовують метод розділення джерела і розв'язок рівняння Гельмгольца:

$$\Delta F + k^2 F = 0, \quad (1)$$

де  $F = F(r)$  – невідома функція від просторової змінної  $r$ ;  $k$  – хвильове число.

D. Colton and A. Kirsch [3] опублікували роботу, де в умові поставленої задачі наперед дано далеке поле, система приймачів, яка знаходиться під кутом  $j$  і плоска хвиля, яка падає під відомим кутом  $q$ . Цю задачу вони пропонують розв'язати за допомогою інтегрального рівняння.

$$\int_{-p}^p u_{\infty}(j, q) g(q) dq = e^{-ikr \cos(j-q)}, \quad (2)$$

де  $u_{\infty}(j, q)$  – модель далекого поля.

У роботі [4] розглянуто задачу визначення форми перешкоди від знання гармоніки падаючої електромагнітної хвилі і далекого поля розсіяної хвилі з частотою в резонансній області. Автори використали метод лінійної вибірки для розв'язання цієї задачі.

У [5] досліджували два методи візуалізації для виявлення розсіювачів для електромагнітних хвиль за фіксованої частоти. Перший з них є класичним методом лінійної вибірки, що потребує обчислення тензора Гріна для фонового середовища. Їхня задача може бути чисельно розв'язана, але є доволі складною для багатограних геометричних фігур. Другий альтернативний підхід, який ґрунтується на функції взаємного розриву і дає змогу уникнути обчислення тензора Гріна, але потребує знання обох полів.

У багатьох роботах метод лінійної вибірки дає змогу практично отримати форму розсіювача. Проте метод потребує інформації про “чисте” розсіяне поле. Отже, за цим методом можна розв'язати не тільки задачу знаходження форми об'єкта, а і задачу знаходження напрямків приходу хвиль, щоб розділити “чисте” розсіяне поле від початкового сигналу і шумів.

Тобто існуючі підходи не дали змогу відновити форму джерела розсіювання без розділення полів на “чисте” розсіяне і далеке поле. Тому у цій роботі пропонується використати метод, який не буде розділяти розсіяного поля.

### Постановка задачі

У деякій області  $A \in \mathbf{R}^2$  знаходиться невідомий об’єкт  $D$ , форму якого потрібно відновити. Границю об’єкта  $D$  позначаємо через  $\partial D \in \mathbf{C}^2$ .

Дано масив з  $m$  пасивних приймачів. Джерело сигналу розташоване доволі далеко, і фронт поширення хвилі є плоским. Після потрапляння хвилі на перешкоду вона розсіюється.

Задача полягає у тому, щоб за даними з приймачів і сформованим масивом відновити форму перешкоди.

### Розв’язання

У деякій області  $A$  знаходиться невідомий об’єкт  $D$ , форму якого нам потрібно відновити. Для цього візьмемо деякий масив з  $m$  приймачів, які розташовані лінійно. Зафіксуємо полярну систему координат в центрі області  $A$ .

Розташуємо приймачі на прямій  $I$ , яка знаходиться на відстані директриси області  $A$ . Відстань між приймачами дорівнює  $\lambda$  (рис. 1).

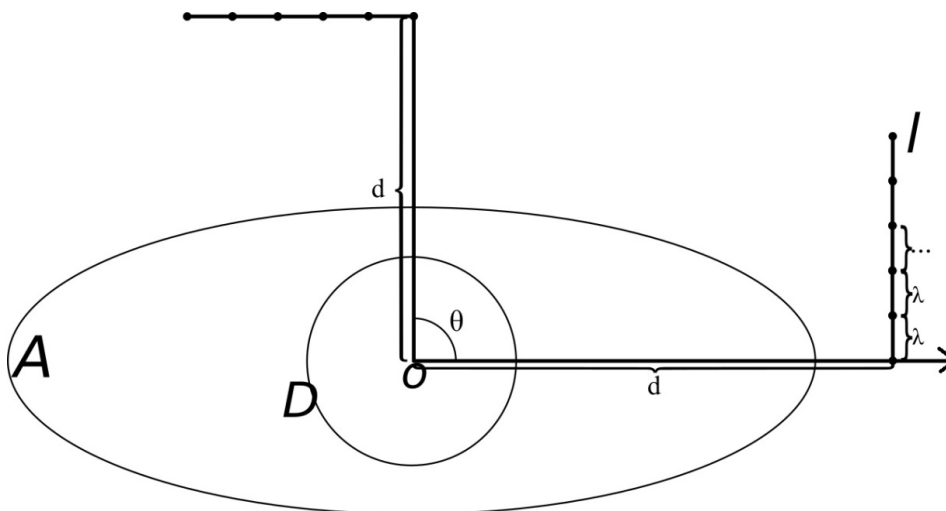


Рис. 1. Розташування системи координат

Розпочинаємо вимірювання при куті  $\varphi = 0$ , тоді дані з приймачів записують у перший стовпчик матриці  $M$ .

Після цього повернемо масив приймачів на деякий кут і заповнимо наступний стовпчик матриці. Здійснюємо вимірювання до проходження повного кола. Кут, на який ми повертаємо масив приймачів, вибираємо довільно. Очевидно, що чим менший кут, тим більша кількість вимірювань і тим більша точність кінцевих результатів відтворення форми джерела розсіювання.

Сформована в результаті вимірювань матриця  $M$  називається матрицею інтенсивності і визначає рівень відбитого сигналу на приймачах під різними кутами. У більшості випадків ця матриця має прямокутну форму, тому для зменшення похибки майбутніх результатів доповнимо її нулями до квадратної форми.

У загальному випадку інтенсивність розсіяного сигналу дорівнює інтегралу функції розподілу щільності вздовж траєкторії сигналу. Таким чином зареєстрований сигнал, обчислений під різними кутами, дає змогу за допомогою перетворення Радона відновити

форму об'єкта. При цьому логарифм від інтенсивності відбитого сигналу дає перетворення Радона для показника відбиття.

Для відновлення форми об'єкта потрібно зробити зворотну проекцію від перетворення Радона, проте у зв'язку з тим, що у складі відбитого сигналу присутні шуми, застосування класичної зворотної проекції дає не достатньо точні результати. Для їхнього уточнення можна здійснити фільтрування за допомогою Рам-Лак фільтра (Ramachandran-Lakshminarayan filter).

Оскільки фільтрація Рам-Лак відбувається в частотній області, то необхідно зробити перехід від перетворення Радона  $R(r, q)$  до перетворення Фур'є. Цей перехід описується виразом [7]:

$$F(w \cos q, w \sin q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwr} R(r, q) dr. \quad (3)$$

Знаходячись в частотній області, можна використати Рам-Лак фільтр, який має таку амплітудно-частотну характеристику:

$$H(\mathbf{u})_{Ram-Lak} = |\mathbf{u}| \quad (4)$$

для  $|\mathbf{u}| < \mathbf{u}_u$ , всі інші значення стають нулями.

Цей фільтр заглушує шум, який присутній в матриці  $M$ . Він діє так, що частина частот, вищих за певну межу, зберігається у вихідному сигналі, а гармоніки на всіх інших частотах замінюються нулями.

Внаслідок фільтрації посилюватиметься шум, якщо частоту зрізу вибрано занадто малою. З врахуванням сказаного, використання Рам-Лак фільтра є необхідним для відфільтрування шумів.

Зробивши всі необхідні розрахунки, можна виконати фільтрацію зворотного проектування для отримання шуканої форми об'єкта.

Оператор зворотного проектування має вигляд [8]:

$$f(x, y) = \int_0^p F(x \cos q + y \sin q, q) dq \quad (5)$$

У дискретному випадку використовується наступне наближення виразу (5)

$$f(x_m, y_m) \approx \Delta q \sum_{t=0}^{T-1} f(x_m \cos q_t + y_m \sin q_t, q_t), \quad (6)$$

де  $T$  – кількість кутових зразків;  $\Delta q$  – різниця між кутами двох проекцій;  $(x_m, y_m)$  – координати проекцій, одновимірну інтерполяцію використовують у  $\mathbf{r}$ -напрямку. Зазвичай для інтерполяції використовують метод найближчого сусіда або лінійну інтерполяцію.

Інтерполяцію методом найближчого сусідства визначають так:

$$f(x_m, y_m) \approx \Delta q \sum_{t=0}^{T-1} f(r^*, t), \quad (7)$$

де  $r^*(m, n; t) = \frac{x_m \cos q_t + y_m \sin q_t - \Delta r}{\Delta r}$ , а лінійна інтерполяція [6]:

$$f(x_m, y_m) \approx \Delta q \sum_{t=0}^{T-1} (1-w) f(r_t, t) + w f(r_t + 1, t), \quad (8)$$

де  $r_t = r^*(m, n; t)$  і  $w = r^* - r_t$ .

Обчислювальна складність зворотного проектування визначається множенням розміру матриці інтенсивності  $M$  на число кутових зразків  $T$ :

$$O_{\text{backprojecton}} = O(M^2T). \quad (9)$$

У результаті всіх обчислень за виразами (3)–(8) отримуємо форму перешкоди  $D$ , яку шукали, затративши  $O_{\text{backprojection}}$  кількість операцій.

### Експериментальні дані

Перевірку працездатності запропонованого в роботі методу відновлення здійснено на об'єкті круглої форми (рис. 2). Оскільки в реальному середовищі при скануванні досліджуваній об'єкт знаходиться на фоні шуму, для експерименту накладемо його на вхідне зображення.

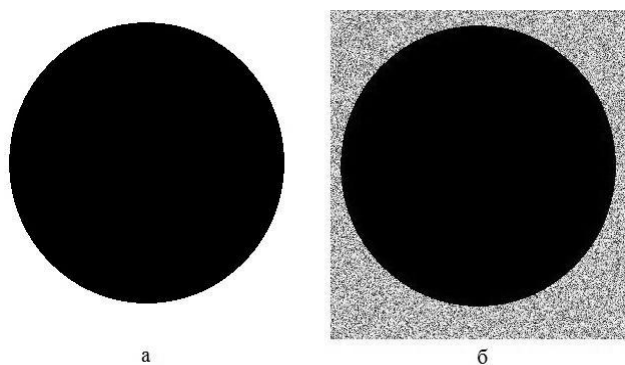


Рис. 2. Перешкода круглої форми та її зашумлене мультиплікативним шумом зображення

На рис. 3 зображено процес відновлення форми об'єкта, наведеного на рис. 2, б за різних кутів повороту приймача.

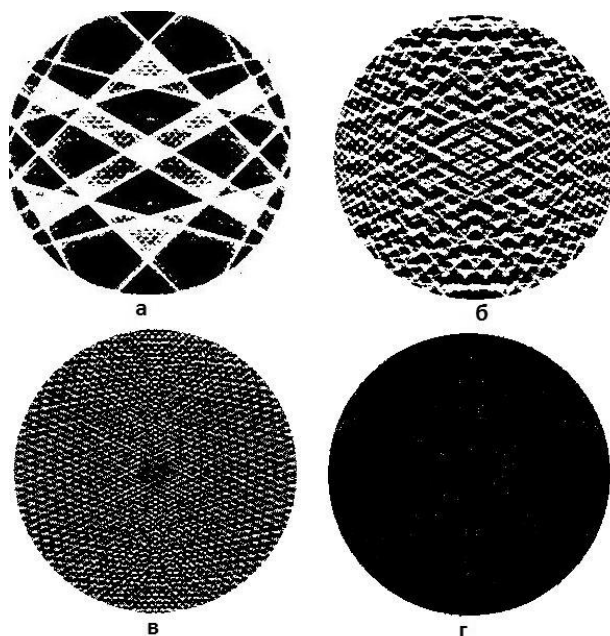


Рис. 3. Відновлене зображення перешкоди для:  
 $a - m = 1, q = 15$ ;  $b - m = 8, q = 30$ ;  $в - m = 16, q = 15$ ;  $г - m = 25, q = 5$

Оцінимо точність відновленого зображення зашумленого кола для запропонованого методу.

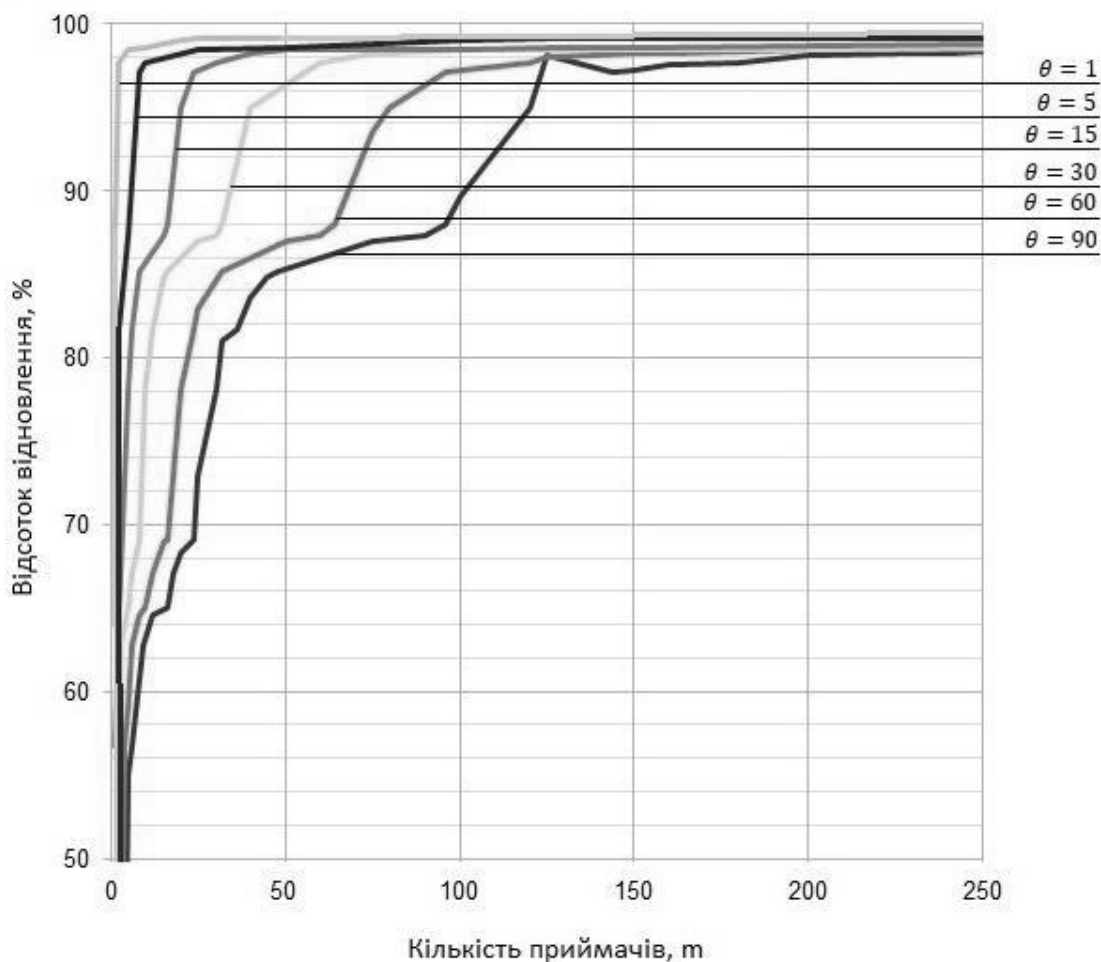


Рис. 4. Залежності точності відновленого зображення від кількості приймачів, для різних кутів повороту системи

За результатом експерименту (рис. 6) стає зрозумілим, що для відновлення кола існує оптимальна кількість приймачів, для яких відсоток відновлення є доволі високим, за різних значень кута повороту системи.

Оцінюють точність відновленого зображення так.

Нехай  $i$  – рядки,  $j$  – стовпці матриці початкового об'єкта, який хочемо відновити.

Алгоритм працює так:

1. Для початкового зображення перевіряємо умову:

$x_{i,j} = x_{i,j+1}$  і  $x_{i,j-1} \neq x_{i,j}$ , тоді  $x_{i,j}$  – точка межі.

Якщо ця умова виконується, то для того самого  $i$  справедлива умова:

$$x_{i,j} = x_{i,j-1} \text{ і } x_{i,j} \neq x_{i,j+1}$$

У випадку першого і останнього рядка контуру межі, між першим і останнім елементом точок додаємо і проміжні точки. набір цих точок  $\{x_{i,j}\}_{i,j=1}^m$  є точками межі.

Обчислюємо кількість точок, які увійшли до межі:

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_{i,j} .$$

2. Позначимо через  $\{y_{k,l}\}_{k,l=1}^m$  всі точки відновленого зображення.

Рахуємо кількість відмінних точок у межі:

$$x_{i,j} - y_{k,l} = z_{n,t} \text{ для } i = k, j = l.$$

$$B = \sum_{n=1}^m \sum_{t=1}^m z_{n,t}.$$

3. Отже, відсоток відновлення  $C$  можна поррахувати за формулою:

$$C = \frac{(A - B)100}{A}. \quad (10)$$

### Висновок

У роботі розглянуто методи для практичного розв'язання задачі знаходження форми розсіювача. Запропоновано новий підхід для розв'язання поставленої задачі на основі методу фільтрованої зворотної проєкції з використанням перетворення Радона.

На відміну від інших методів, метод фільтрованої зворотної проєкції має низку переваг. Вимірне приймачами розсіяне поле, спотворене шумом, не потрібно поділяти на "чисте" чи далеке поле, що дає змогу залишатись в області розв'язання однієї задачі. Деякі автори пропонують інший підхід до таких задач, проте під час розв'язання виникає додаткова задача щодо розділення полів і джерел приходу хвиль. Метод фільтрованої зворотної проєкції діє для різної кількості хвиль і форми фронту їх приходу, а з використанням височастотних фільтрів можна зменшити рівень шуму. Метод не потребує попередніх уявлень про геометрію об'єкта розсіювання, що дає змогу відновити будь-який невідомий об'єкт, розташування якого приблизно відоме.

Встановлено залежності відтвореного зображення від кількості приймачів і кута повороту системи. Для потрібного кута можна вибрати мінімальну кількість приймачів, для яких відсоток відновлення буде високим.

Цей підхід реалізовано в середовищі MatLab.

1. Philip M. Morse. *Vibration and Sound* / Philip M. Morse. – London: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1948. – S. 294–380. 2. Angell T.S. *On a numerical method for inverse acoustic scattering* / Angell T. S., Jiang X. and Kleinman R. E. // *Inverse Problems*. – 1997. – Vol. 13. – S. 531–545. 3. Colton D. *A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region* / Colton D. and Kirsch A. // *Inverse Problems*. – 1996. – Vol. 12. – S. 383–393. 4. Colton D. *The Linear Sampling Method for Solving the Electromagnetic* / Colton D., Haddar H. and Monk P. // *Inverse Scattering Problem. SIAM J. Sci. Comput.* – 2002. – Vol. 24(3). – S. 719–731. 5. Fioralba Cakoni *Analysis of two linear sampling methods applied to electromagnetic imaging of buried objects* / Fioralba Cakoni, M'Barek Fares and Housseem Haddar // *Inverse Problems*. – 2006. – Vol. 22(3). – S. 845–868. 6. Davis M. E. *Numerical Methods and Modeling for Chemical Engineers* / Davis M. E. – Wiley, New York: Chichester, Brisbane, 1984. – S. 127–146. 7. Radon J. *Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten* / Radon J. – *Berichte Sächsische Academie der Wissenschaften, Mathematisch, Physische Klasse* 69, 1917, s. 262–277. 8. Jorge Bernal del Nozal *Use of Projection and Back-projection Methods* / Jorge Bernal del Nozal. – *Computer Vision Center Edifici O, Universitat Autònoma de Barcelona*, 2009. – S. 23–28.

### References

1. Philip M. Morse, (1948), *Vibration and Sound*, McGraw-Hill Book Company, pp. 294–380. 2. Angell T.S., Jiang X. and Kleinman R. E., (1997), *On a numerical method for inverse acoustic scattering*, *Inverse Problems*, Vol. 13, pp. 531–545. 3. Colton D. and Kirsch A. (1996), *A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region*, *Inverse Problems*, Vol. 12, pp. 383–393.

4. Colton D., Haddar H. and Monk P. (2002), *The Linear Sampling Method for Solving the Electromagnetic Inverse Scattering Problem*, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 24(3), pp. 719–731.
5. Fioralba Cakoni, M'Barek Fares and Housseem Haddar, (2006), *Analysis of two linear sampling methods applied to electromagnetic imaging of buried object.*, *Inverse Problems*, Vol. 22(3), pp. 845–868.
6. Davis M. E., (1984), *Numerical Methods and Modeling for Chemical Engineers*, Wiley, New York, Chichester, Brisbane, pp. 127–146.
7. Radon J. (1917), *Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, *Berichte Sächsische Academie der Wissenschaften, Mathematisch, Physische Klasse* 69, pp. 262–277.
8. Jorge Bernal del Nozal, (2009), *Use of Projection and Back-projection Methods*, *Computer Vision Center Edifici O, Universitat Autònoma de Barcelona*, pp. 23–28.