

УДК 528.422:519.25

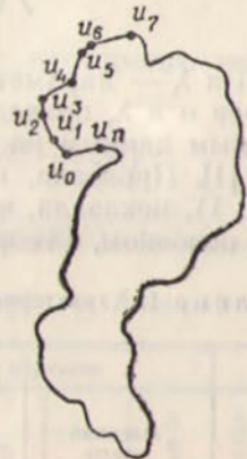
Л. К. ВОЙСЛАВСКИЙ

## СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЯ РЕЛЬЕФА ГОРИЗОНТАЛЯМИ НА ТОПОГРАФИЧЕСКИХ КАРТАХ

Изображение рельефа горизонталами на топографических картах и планах представляет собой сложную систему с неопределенным множеством состояний. Неопределенность понимается в том смысле, что ни форму горизонталей, ни их взаимное положение невозможно предсказать заранее. Вместе с тем совокупности горизонталей обладают некоторыми свойствами, которые могут быть использованы при цифровом моделировании рельефа, определении информационной емкости банка данных и решении других задач. Для изучения этих свойств, принимая во внимание их вероятностный характер, целесообразно применить методы математической статистики.

Рассмотрим сначала одну, отдельно взятую горизонталь. Аппроксимируем ее ломаной линией, выделив из бесконечно-го множества точек кривой (рис. 1) конечное подмножество характерных точек

$$\{u_0, u_1, \dots, u_n\}. \quad (1)$$



Аппроксимация замкнутой горизонтали ломаной линией.

В последовательности (1) положение каждой точки  $u_j$  относительно предыдущей  $u_{j-1}$  ( $j \geq 1$ ) однозначно определяется азимутом  $A_j$  и длиной  $l_j$  элементарного отрезка ломаной линии\*. Значения  $l$  и  $A$  можно рассматривать как случайные величины. Причем  $l$  имеет линейную размерность, а  $A$  — угловую.

Статистические свойства и распределение вероятностей случайных величин

$$\left\{ \begin{array}{c} l_1, l_2, \dots, l_n; \\ A_1, A_2, \dots, A_n \end{array} \right\} \quad (2)$$

\* Понятия «характерная точка» и «элементарный отрезок» определены в работе [2].

определенны опытным путем. Так как в общем случае горизонталь — замкнутая кривая, в качестве объектов исследования на топографических картах (планах) в масштабах 1 : 1000, 1 : 2000, 1 : 10000, 1 : 25000 и 1 : 50000 подобрано 11 замкнутых горизонталей различной конфигурации. Каждая из них имеет от 120 до 430 характерных точек. Значения случайных величин (2) вычислены по координатам, измеренным на карте с точностью 0,1 мм [2].

В результате проведенного эксперимента установлено:

1. Случайные величины  $l$  и  $A$  подчинены различным законам распределения вероятностей. Значения коэффициентов корреляции  $r(l, A)$  по абсолютной величине не превышают 0,18 (табл. 1). Это дает основание полагать, что линейные и угловые элементы в (2) стохастически независимы.

2. В качестве наиболее подходящей вероятностной модели для случайной величины можно принять гамма-распределение с плотностью вероятностей

$$f(l) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} l^{\alpha-1} \exp(-\lambda l), \quad (3)$$

где  $\alpha$  и  $\lambda$  — параметры,  $\Gamma(\alpha)$  — гамма-функция. Оценки параметров  $\alpha$  и  $\lambda$ , приведенные в табл. 1, получены по экспериментальным данным на основе метода максимального правдоподобия [1]. Проверка, проведенная при помощи критерия  $\chi^2$  (см. табл. 1), показала, что эмпирические распределения согласуются, в основном, с теоретическими.

Таблица 1. Характеристика распределения длин и азимутов элементарных

№ п/п	Масштаб карты	Кол-во характер- ных точек	Коэффициент корреляции $r(lA)$	$\sigma(r)$	Длина элементарных		
					Средняя длина $\bar{l}$ , м	точек км	$\alpha$
1	1:1000	126	0,03	0,09	3,3	1460	4,82
2	1:2000	436	-0,07	0,05	7,9	466	3,70
3	1:2000	197	0,14	0,07	6,2	550	3,39
4	1:2000	238	-0,15	0,06	5,4	590	3,19
5	1:10000	129	0,18	0,09	26,5	145	3,85
6	1:10000	260	0,09	0,06	24,2	116	2,80
7	1:25000	363	-0,08	0,05	50,2	91	4,59
8	1:50000	316	0,04	0,06	69,9	89	6,19
9	1:50000	129	0,10	0,09	88,0	60	5,25
10	1:50000	155	0,06	0,08	86,6	80	6,90
11	1:50000	319	0,02	0,06	67,2	101	6,76

Примечание. При вычислении критерия  $\chi^2$  первоначальное количество интервалов с теоретически ожидаемым числом элементов менее десяти объединялись интервалов обусловлено высокой концентрацией распределений (особенно для элементар-

3. Параметр гамма-распределения  $\alpha$  тесно связан с масштабом топографической карты. То же самое следует сказать о средней длине элементарного отрезка  $l$ . Коэффициенты корреляции соответственно равны:  $r(\alpha, M) = 0,87$ ,  $r(l, M) = 0,98$ , где  $M$  — знаменатель численного масштаба карты.

В этом мы усматриваем новое подтверждение гипотезы, что в процессе генерализации изображения при переходе к более мелкому масштабу происходит своеобразное «просеивание» первичной последовательности характерных точек [2]. Параметр  $\alpha$  выражает меру обобщения горизонтали, т. е. в среднем из каждого  $\alpha$  точек первичной последовательности ее генерализованное изображение сохраняет только одну.

4. В качестве наиболее подходящей вероятностной модели для азимутов элементарных отрезков можно принять два вида распределений: а) одновершинное распределение Мизеса с плотностью вероятностей [3]

$$f_1(A) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \exp\{k \cos(A - \mu_1)\}; \quad (4)$$

б) двувершинное распределение Мизеса с плотностью вероятностей

$$f_2(A) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \exp\{k \cos[2(A' - \mu_2)]\} \quad (5)$$

$$(k > 0, 0 \leq \mu_1 \leq 360^\circ, 0 \leq \mu_2 \leq 180^\circ).$$

отрезков у замкнутых горизонталей, изображенных на топографических картах

отрезков		Азимуты элементарных отрезков					
Критерий $\chi^2$	Число степеней свободы $\sim k = r - 1$	Вид распределения	$R$	$\mu$ радиан	$k$	Критерий $\chi^2$	Число степеней свободы $\sim k = r - 1$
12,0	6	Двувершинное	0,19	1,01	0,39	13,8	7
23,4	7	Двувершинное	0,37	3,09	0,80	19,9	17
16,8	7	Одновершинное	0,05	1,96	0,10	26,9	17
14,9	6	Двувершинное	0,27	0,62	0,56	2,1	8
9,1	6	Одновершинное	0,12	0,88	0,24	10,8	8
13,0	6	Двувершинное	0,20	0,51	0,41	9,4	8
10,2	9	Двувершинное	0,16	2,42	0,32	9,7	17
15,6	9	Двувершинное	0,31	2,81	0,65	14,4	17
2,6	7	Двувершинное	0,22	2,80	0,45	9,1	8
3,2	6	Одновершинное	0,04	2,52	0,08	3,8	8
7,5	6	Одновершинное	0,01	2,42	0,02	8,1	17

интервалов группирования принималось в соответствии с рекомендациями ГОСТ 11.006-74. с одним или несколькими соседними интервалами. Значительное сокращение числа отрезков) вблизи модальных значений.

В выражениях (4) и (5) принятые обозначения:  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $k$  — параметры  $I_0(k)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка,  $A'$  — случайная величина, значения которой соответственно равны

$$A' = \begin{cases} A, & \text{если } 0 < A \leq 180^\circ; \\ A - 180^\circ, & \text{если } 180^\circ < A \leq 360^\circ. \end{cases}$$

Параметры  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $k$  являются специальными характеристиками расположения и рассеяния случайной величины  $A$ . Как известно, традиционные характеристики (среднее значение, дисперсия, среднее квадратическое отклонение) для угловых величин в ряде случаев малопригодны, так как они зависят от выбора начала отсчета углов [3]. Вместо них здесь используют несколько иные оценки, а именно:

а) Длина случайного вектора

$$R = \sqrt{C^2 + S^2}, \quad (6)$$

где

$$C = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos A_j; \quad S = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin A_j. \quad (7)$$

$n$  — объем выборки.

Из выражений (6) и (7) следует, что  $R$  может принимать значения от 0 до 1.

б) Круговое среднее направление  $\mu$ , определяемое системой уравнений

$$\cos \mu = \frac{C}{R}; \quad \sin \mu = \frac{S}{R}, \quad (8)$$

откуда затем находим

$$\mu_\omega = \frac{\mu}{\omega},$$

где  $\omega = 1, 2, \dots$  — число вершин кривой распределения.

в) Круговая дисперсия

$$V = 1 - R. \quad (9)$$

г) Круговое стандартное отклонение

$$\sigma = \sqrt{-2 \ln(1-V)}. \quad (10)$$

Параметр  $k$  служит мерой концентрации распределения в окрестности  $\mu$  и определяется как корень уравнения

$$\frac{I_1(k)}{I_0(k)} = R.$$

Для  $R$ , близких к нулю, оценку этого параметра можно вычислить по приближенной формуле

$$k \approx \frac{1}{6} R (12 + 6R^2 + 5R^4),$$

а для  $R$ , близких к единице, по формуле

$$\frac{1}{k} \approx 2(1-R) - (1-R)^2 - (1-R)^3.$$

Как это видно из табл. 1, эмпирические распределения, полученные из эксперимента, согласуются, в основном, с теоретическими. Примеры одно- и двувершинного распределения азимутов элементарных отрезков представлены в табл. 2.

Таблица 2. Типичные примеры ориентации элементарных отрезков у замкнутых горизонталей

Наименование выборок	Азимуты элементарных отрезков									Всего
	0°— —40°	40°— —80°	80°— —120°	120°— —160°	160°— —200°	200°— —240°	240°— —280°	280°— —320°	320°— —360°	

#### Одновершинное распределение Мизеса ( $\mu_1 = 180^\circ$ ; $k = 0,24$ )

a) Количество отрезков, полученное по опытным данным	10	10	11	17	27	12	11	15	15	128
b) Теоретически ожидаемое число отрезков	11,7	12,7	14,6	16,3	17,1	16,3	14,6	12,7	11,7	127,7

#### Двувершинное распределение Мизеса ( $\mu_2 = 90^\circ$ ; $k = 0,65$ )

a) Количество отрезков, полученное по опытным данным	21	50	51	41	18	24	52	43	15	315
b) Теоретически ожидаемое число отрезков	21,3	43,1	54,1	29,8	18,5	29,8	54,1	43,1	21,3	315,1

Примечание. Теоретически ожидаемое число отрезков вычислено при помощи таблиц, помещенных в [3].

Проведенные исследования дают основание предположить, что двувершинные распределения будут встречаться чаще, чем одновершинные. Появление многовершинных распределений ( $\omega > 2$ ) представляется нам маловероятным, хотя полностью исключить это нельзя.

Рассмотрим теперь изображение рельефа как совокупность горизонталей. Отметим, прежде всего, что очертания соседних, а также близко расположенных горизонталей в общем случае зависят. Эта зависимость обусловлена двумя причинами:

1. Горизонтали  $\Gamma_i$  и  $\Gamma_k$  не пересекаются, что само по себе налагает на системы величин

$$\left( A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in} \right) \in \Gamma_i, \quad \left( A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{kn} \right) \in \Gamma_k \quad (11)$$

некоторые фиксированные ограничения.

2. Отдельные горизонтали определенным образом согласуются своими очертаниями как с рельефом местности, так и одна с другой. Вследствие этого между системами величин (11) неизбежно возникают стохастические зависимости, что, в свою очередь, накладывает существенные ограничения на распределения вероятностей. В отличие от фиксированных будем называть эти ограничения *вероятностными*.

Возникает вопрос: в чем конкретно проявляется такого рода согласованность. Какие зависимости она порождает?

В поисках ответа предпринято экспериментальное исследование. На топографических картах (планах) в масштабах 1:500, 1:1000, 1:2000, 1:10000, 1:25000 выделено семь участков (водораздельные плато, склоны речных долин, расчлененные поперечными лощинами, слабо расчлененные склоны, лощины и др.) с непохожим строением рельефа, разной крутизной скатов, а потому и с самой разнообразной формой горизонталей. Важным было лишь то, чтобы каждый участок был однороден в геоморфологическом отношении и не имел экстремальных точек (вершин, котловин, седловин). Последнее обусловлено сравнительно малой густотой таких точек. При этом имелось в виду, что участки, где экстремальные точки встречаются не столь уж редко (заболоченные поймы с большим числом стариц, мелкосопочный рельеф, бугристые пески и др.), должны стать предметом отдельного исследования.

Форма и размеры участка определялись из следующих соображений: на участке должно быть не менее девяти горизонталей ( $m \geq 9$ ), причем каждая из них включает 60 характерных точек.

Как и в случае одиночных горизонталей по координатам точек определены азимуты элементарных отрезков. Из азимутов образованы случайные величины.

$$a(z)_{kj} = A_{i+k,j} - A_{ij},$$

где  $z = k\sigma_0$  — разность высот горизонталей,  $\sigma_0$  — высота сечения,  $k = 1, 2, \dots, 7$ ,  $i = 1, 2, \dots, m-k$  — порядковые номера горизонталей,  $j$  — порядковый номер элементарного отрезка. В результате получены выборки случайных величин  $a(z)$ , объем которых

$$n = \begin{cases} 177, & \text{если } k \leq 5; \\ 118, & \text{если } k > 5. \end{cases}$$

Для каждой выборки по формуле (6) вычислена длина случайного вектора  $R_z$  (табл. 3).

Сравнивая  $R$  (табл. 1) и  $R_z$  (табл. 3), можно заметить, что по всему исследованному диапазону превышений

$$R_z > R.$$

Между тем, если у горизонталей  $\Gamma_i$  и  $\Gamma_{i+k}$  случайные величины  $A_{i+k,j}$ ,  $A_{ij}$  независимы и имеют распределение Мизеса, то и их

Таблица 3. Зависимость длины случайного вектора  $R_z$  от разности высот горизонталей для различных участков местности

Разность высот горизонталей, м	1	2	3	4	5	6	7
0,25	0,890						
0,5	0,815	0,969	0,964				
0,75	0,850						
1	0,829	0,945	0,933	0,930			
1,25	0,814						
1,5	0,834	0,953	0,882				
1,75	0,735						
2		0,927	0,866	0,916			
2,5		0,903	0,851		0,955		
3		0,905	0,833	0,823			
3,5		0,857	0,817				
4				0,808			
5				0,803	0,906	0,878	0,755
6				0,766			
7				0,693			
7,5					0,947		
10					0,914	0,786	0,616
12,5					0,913		
15					0,902	0,728	0,703
17,5					0,861		
20						0,636	0,615
25						0,546	0,481
30						0,484	0,443
35						0,477	0,543
Масштаб	1:2000	1:500	1:1000	1:10000	1:10000	1:25000	1:25000
Высота сечения $\tau$	0,25	0,5	0,5	1	2,5	5	5
	-0,345	-0,079	-0,127	-0,099	-0,017	-0,045	-0,049

Примечание. Значения параметра  $\tau$  получены по экспериментальным данным методом наименьших квадратов.

разности  $a(z)_j$  также аппроксимируются распределением Мизеса [3]. При этом

$$R_z = R_i R_{i+k}, \quad (12)$$

т. е.

$$R_z < R,$$

так как множители в правой части (12) меньше единицы. Следовательно, случайные величины  $A_{i+k,j}$  и  $A_{ij}$  — зависимы.

Количественной мерой этой зависимости может служить длина вектора  $R_z$ , которая будет тем больше, чем теснее связь случайных величин  $A_{i+k}$  и  $A_i$ . Как это видно из табл. 3, между величиной  $R_z$  и разностью высот  $z$  имеет место функциональная зависимость, которую можно выразить формулой

$$R_z = \exp \left( \frac{\tau z}{2} \right), \quad (13)$$

где параметр  $\tau$  всегда меньше нуля. Для соседних горизонталей равенство (13) можно записать в виде

$$R_z = \exp\left(\frac{\tau z_0}{2}\right), \quad (14)$$

где  $z_0$  — высота сечения рельефа горизонталями.

Установленная нами зависимость есть не что иное как следствие азимутальной согласованности горизонталей. Формулы (13), (14) характеризуют эту согласованность в количественном отношении. Соответственно параметр  $\tau$  можно рассматривать как коэффициент согласования горизонталей.

Выполненное исследование позволило установить основные вероятностные свойства как одной, отдельно взятой горизонтали, так и их совокупностей. В дальнейшем эти свойства будут использованы для создания информационной модели изображения рельефа горизонталями.

**Список литературы:** 1. Браунли К. А. Статистическая теория и методология в науке и технике. — М.: Наука, 1977. 2. Войславский Л. К. Вероятностная модель изображения контуров местности на топографических картах. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 29. 3. Мардига К. Статистический анализ угловых наблюдений. — М.: Наука, 1978.