

Можно принять, что погрешность разбиваемой точки сетки в  $\sqrt{2}$  раз меньше [1]:

$$m_{\text{разб. точки}} = \frac{m_s}{\sqrt{2}}. \quad (2)$$

При  $m_s$ , равной 5 мм,  $m_{\text{разб. точки}} = 3,5$  мм.

Разбивая точки сетки способом полярных координат и учитывая принцип равного влияния погрешностей линейных и угловых измерений [3]:

$$m_L = \frac{m_B}{\rho} L, \quad (3)$$

получаем

$$m_{\text{разб. точки}}^2 = m_{\text{исх}}^2 + 2 \left( \frac{m_B L}{\rho} \right)^2. \quad (4)$$

Отсюда погрешность  $m_{\text{исх}}$  в пунктах полигонометрии можно вычислить по формуле

$$m_{\text{исх}} = \sqrt{m_{\text{разб. точки}}^2 - 2 \left( \frac{m_B L}{\rho} \right)^2}, \quad (5)$$

где  $m_B$  — погрешность построения полярного угла;  $\rho$  равно 206265";  $L$  — расстояние до разбиваемой точки. Если принять

$$m_{\text{разб. точки}} = 2,5 \text{ мм}; \quad m_B = 4''; \quad L = 75 \text{ мм},$$

то по формуле (5)  $m_{\text{исх}} = 2,4$  мм.

С учетом систематических погрешностей в длине стороны полигонометрии будет в  $\sqrt{2}$  раз больше.

$$m_{s_n} = m_{\text{исх}} \sqrt{2}. \quad (6)$$

В нашем случае  $m_{s_n} = 3,4 \cdot \sqrt{2} = 4,8$  мм.

Формулу (5) можно применять и для приближенного расчета погрешности  $m_{\text{исх}}$  при разбивке точек сетки прямой угловой засечкой, если значение угла засечки около  $90^\circ$ .

При средней длине сторон полигонометрии 100 м относительная ошибка должна быть меньше или равна

$$f_{\text{стп}} = \frac{m_{s_n}}{s_n} = \frac{4,8}{10.000} = \frac{1}{21.000}.$$

Такую точность можно получить, измеряя стороны полигонометрии с помощью светодальномера МСД-1, базисного прибора, а углы — теодолитом Т-2.

Точность построения строительной сетки контролируют, промеряя ее стороны и сравнивая их с номиналом, а ортогональность — при помощи теодолита.

Экспериментальное построение сетки таким методом на участке в 4 га показало, что линейное отклонение длины от номинальной находится в пределах  $\pm 5$  мм, а значение углов отличается от  $90^\circ$  на  $7 \dots 10''$ .

Список литературы: 1. Левчук Г. П. Курс инженерной геодезии. — М.: Недра, 1970. 2. Ливанов М. М. Геодезия в строительстве. — М.: Стройиздат, 1972. 3. Субботин И. Е., Мазницкий А. С. Справочник строителя по инженерной геодезии. — Киев: Будівельник, 1972.

Статья поступила в редколлегию 21 апреля 1980 г.

УДК 528.061.28

Р. М. ТАРТАЧИНСКИЙ

### ХАРАКТЕР ВЛИЯНИЯ БОКОВОЙ РЕФРАКЦИИ В ГОРОДСКОЙ СЕТИ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Качество современных геодезических инструментов позволяет измерять с очень высокой точностью горизонтальные углы как в государственных, так и в городских сетях триангуляции. Однако влияние внешней среды, особенно рефракции, в городских условиях затрудняет производство измерений и зачастую значительно искажает полученные результаты. Температурные особенности городской среды приводят к образованию над городом местных (локальных) полей рефракции и общего рефракционного поля. Кроме того, если до настоящего времени в крупных городах большая часть территории жилой застройки была занята одно-, двух- и трехэтажными зданиями, то сейчас уже ведется высотное строительство, и визирный луч может проходить не только над препятствиями, но и между ними, т. е. в сфере действия температурных полей, создаваемых стенами зданий.

Если пункты городской триангуляции расположены на крышах зданий, т. е. сеть триангуляции построена над городом, то при измерении углов в такой сети визирные направления будут искажаться действием как общего рефракционного поля, так и отдельных локальных рефракционных полей. Характер и направление действия этих полей во многом зависит от близости визирного луча к крышам зданий, цвета крыш, углов наклона крыш, ориентировки пересекаемых лучом улиц, близости зеленых насаждений и т. д.

В этой области исследований отметим экспериментальные работы [7—10], [13—14] и, в некоторой степени, [9]. Из названных работ представляет интерес прежде всего работа [13], в которой описаны результаты температурных наблюдений трех метеорологических станций г. Москвы и экспериментальные угловых наблюдений. Анализируя ее результаты замечаем хорошую коррелятивную связь между ходом угла  $\alpha$  и ходом раз-

ности температур «Балчуг—ВДНХ» и «Балчуг—парк Сокольники» несмотря на то, что температурные и угловые измерения не относятся точно к одному и тому же периоду времени. Коэффициент корреляции, вычисленный по этим данным, составляет 0,84. Поскольку  $\Delta T$  отображает изменение общегородского температурного поля, то и ход угла следует за этими изменениями. Следовательно, в наблюдениях практически неощутимо влияние локальных полей, чего и следовало ожидать, так как измеряемое направление проходит уже на первых двух километрах на высоте 6...15 м, а дальше 20...50 м. Данные работы свидетельствуют также, что имеется значительная несогласованность между ходом температуры и ходом измеряемого угла в вечерние и ночные часы, т. е. в часы, когда особенно заметна разность температур «город—окрестность». В дневные часы, когда крыши и улицы сильно прогреваются и, казалось бы, их воздействие на визирный луч должно быть максимальным, такого явления не наблюдается. Это еще раз показывает, что искривление визирных лучей, проходящих над городом, происходит в основном не от действия отдельных локальных рефракционных полей, а общего городского рефракционного поля [10]. Нет сомнения, что отдельные локальные рефракционные поля будут искажать измеряемые направления в зависимости от высоты прохождения визирного луча над подстилающей поверхностью, времени измерения углов и др. В общем же действие локальных рефракционных полей должно носить случайный характер, т. е. следует ожидать так называемого рефракционного рассеивания.

Рефракционное рассеивание происходит не только от изменения этих полей в горизонтальной плоскости, но и в вертикальной плоскости.

Для исследования проблемы экспериментально проверен характер изменения температуры с высотой над различными подстилающими поверхностями: жестяные крыши (Центральный, ЛПИ), кронами деревьев (Стрыйский), травянистый покров (Яновский, Кульпарковский). Порядок и программа выполнения исследований описаны в работе [8]. На рис. 1 представлены средние значения измеренных градиентов температуры над описанными выше подстилающими поверхностями.

Из рис. 1 видно, что момент изотермии над различными подстилающими поверхностями как утром, так и вечером не наступает в одно и то же время, соответствующее периоду наилучшей видимости и спокойных изображений. Поэтому и с этой точки зрения влияние локальных полей должно носить случайный рассеивающий характер.

Поскольку с поднятием визирного луча над подстилающей поверхностью влияние боковой рефракции уменьшается (это хорошо показано в работе [4]), то становится очевидным, что основное внимание должно быть уделено исключению влияния общегородского поля рефракции (температуры).

Приведенные в работах [3] и [12] данные свидетельствуют, что изотермы почти всегда следуют очертаниям города. Погрешности в измеряемых направлениях, вызываемые действием боковой рефракции, зависят от значения горизонтального температурного градиента, которое можно вычислить по известной формуле

$$\delta = -10,9 \frac{B}{T^2} S \cdot \frac{dT}{dx}$$

Для дальнейших рассуждений предположим, что изотермы представляют собой концентрические окружности и что над городом запроектирована сеть триангуляции.

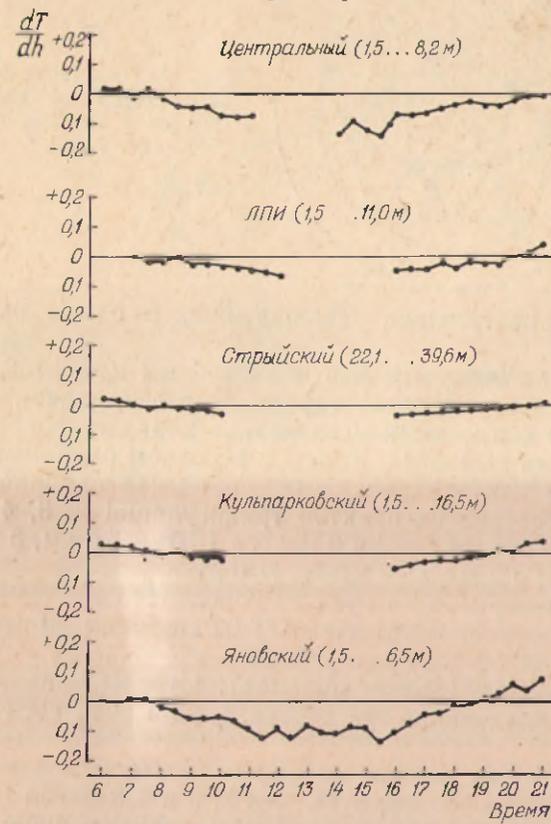


Рис. 1. Средние значения измеренных вертикальных градиентов температуры над различными подстилающими поверхностями г. Львова.

Направления, идущие из центра города (центра высокой температуры), не искажаются боковой рефракцией даже при значительной разности температур «город—окрестность» (рис. 2). Невязки треугольников, расположенных над центральной частью и окраинами города, имеют преобладающий отри-

Изучению ослабления воздействия боковой рефракции в городской полигонометрии посвящен ряд фундаментальных экспериментальных работ [1—6], в которых разработаны эффективные меры борьбы с этими систематическими влияниями, позволяющие измерять углы в пасмурную погоду, иными словами, такое время дня, когда на ту или иную улицу не попадают прямые солнечные лучи, прокладывая ходы полигонометрии по тенистым сторонам улиц, удалять знаки от стен зданий

### Невязки треугольников

п. н.	Вершина	Невязка	П. н.	Вершина	Невязка
2 класс					
1	I—III—IV	-0,73	8	III—IV—V	-0,73
2	I—IV—V	+1,50	9	II—III—IV	-0,73
3	I—V—VI	+0,18	10	I—II—V	-0,73
4	I—II—VI	-1,19	11	II—V—VI	-0,73
5	I—II—III	-1,97	12	II—III—VI	-0,73
6	I—II—IV	-1,29	13	II—IV—V	-0,73
7	I—III—V	+1,45		Полигон	-0,73
				III—IV—V	-0,73
				VI—II—III	-0,73
3 класс					
1	III—I—V	-0,61	19	6—8—5	-0,61
2	I—2—V	-1,43	20	6—III—8	-0,61
3	3—1—2	-2,24	21	8—II—9	-0,61
4	3—2—V	+0,20	22	8—7—III	-0,61
5	2—I—V	-4,68	23	8—III—10	-0,61
6	1—IV—V	+0,43	24	9—IV—III	-0,61
7	1—4—3	-1,58	25	III—10—IV	-0,61
8	1—4—3	+4,52	26	III—IV—I	-0,61
9	2—4—5	+1,43	27	I—IV—V	-0,61
10	2—5—1	+1,75	28	III—7—II	-0,61
11	2—1—1	+5,54	29	III—12—II	-0,61
12	I—IV—I	-0,16	30	III—II—IV	-0,61
13	1—4—IV	+0,41	31	12—IV—III	-0,61
14	5—4—1	+0,13	32	12—I—III	-0,61
15	4—5—8	-2,57	33	11—12—IV	-0,61
16	4—8—9	-0,25	34	12—IV—I	-0,61
17	4—9—IV	-3,36		V—3—1—5—6	-0,61
18	9—IV—10	+4,15		III—12—IV—V	-0,61
				Полигон	-0,61
				V—3—1—5—6	-0,61
				III—12—II—IV—V	-0,61

При измерении углов в городской триангуляции необходимо эффективно измерять углы в пасмурную погоду. Что касается других методов профилактического характера, то они для триангуляционных работ мало пригодны. Во-первых, если в полигонометрии представляется возможным прокладывать ходы по тенистой стороне улицы, то в триангуляции такой возможности нет. В триангуляции почти всегда одно направление будет

по тенистой стороне (тенистой улице), а другое — по освещенной стороне (освещенной улице). В этом случае очень трудно или почти невозможно подобрать такое время наблюдений, чтобы температурные возмущения на стенах улиц были бы одинаковыми, что видно из рис. 4.

Из представленного на этом рисунке графика дневного хода температуры поверхности стен различной ориентации в г. Ереване за 24 сентября 1937 г. видим, что разность температур возможных стен (наименее нагреваемых) достигает

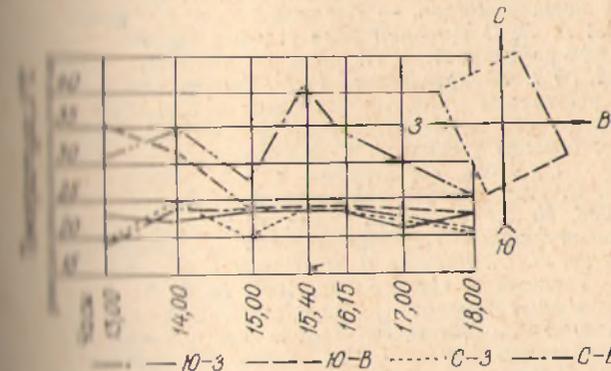


Рис. 4. Дневной ход температуры поверхности стен различной ориентации в г. Ереване за 24 сентября 1937 г.

Мы упомянуто не называем разностей, составляющих несколько температур стен зданий, у которых проходят прямые солнечные лучи, различны, то будет наблюдаться систематическое влияние боковой рефракции.

В таком образе, рефракционное поле, создаваемое городом с высотностями, имеет односторонний систематический характер и может заметно исказить результаты угловых измерений в городской триангуляции.

Борьба с систематическими рефракционными влияниями можно вести не только путем выбора наивыгоднейшего времени измерения горизонтальных направлений, но и с помощью особенностей города при создании сети триангуляции. Особенно видны лучей над подстилающей поверхностью, что ослабляет влияние местных полей рефракции и рефракционного поля города.

При создании городской сети триангуляции следует избегать рефракционно-опасных направлений (граница парка и здания и т. д.).

Особенно, физико-географические особенности городов СССР разнообразны, поэтому в отдельных случаях решение вопроса имеет свои особенности. Однако в любом городе существует положительная разность «город—окрестность», ко-

торая будет изменяться только по величине, что, в свою очередь, повлечет за собой увеличение или уменьшение рефракционных влияний.

Список литературы: 1. Зюзин А. С. Боковая рефракция при измерении углов на пунктах городской полигонометрии. — Геодезия и картография, 1966, № 6. 2. Зюзин А. С. Характер температурного поля в городе и явление аномальной боковой рефракции. — Изв. АН СССР. Серия геофизическая, 1959, № 2. 3. Кратцер П. А. Климат города. — М.: ИЛ, 1958. 4. Пеллинен Л. П. Исследование по угловым измерениям в триангуляции. — Тр. ЦНИИГАиК, 1957, вып. 114. 5. Островский А. Л. Исследования по боковой рефракции в полигонометрии. — Львовский политехнический институт, 1958. 6. Островский А. Л. О суточном ходе угловых невязок треугольников, вызванных боковой рефракцией. — Научные записки ЛПИ. Серия геодезическая, 1962, вып. 82, № 7. 7. Тартачинский Р. М. Температурное поле города и его влияние на результаты угловых измерений в городской триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1974, вып. 19. 8. Тартачинский Р. М. Исследование боковой рефракции в экспериментальной городской сети триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1975, вып. 22. 9. Хаимов З. С. Исследование рефракции луча Лазера. — Геодезия и картография, 1968, № 2. 10. Хижак Л. С. К вопросу влияния рефракции в городской триангуляции. — Научные записки ЛПИ. Серия геодезическая, 1961, № 6. 11. Хренов Л. С., Коськов Б. И., Зимин К. И. Триангуляция Белграда (СФСЮ). — Геодезия и картография, 1967, № 8. 12. Шелейховский Г. В. Микроклимат южных городов. — М.: Медгиз, 1948. 13. Яковлев Н. В. Об учете климатических особенностей города при угловых измерениях в городской триангуляции I кл. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1960, № 6. 14. Яковлев Н. В. К теории и практике учета суточного хода рефракции при угловых измерениях и азимутальных определениях в геодезических сетях. — Геодезия и картография, 1969, № 3.

Статья поступила 14 февраля 1980 г.

УДК 528.3

Л. С. ХИЖАК, Д. И. МАСЛИЧ, И. И. ДИДУХ

### ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СВЕТОВОЙ КРИВОЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ РЕФРАКЦИИ

Известно, что в соответствии с принципом Ферма световая кривая удовлетворяет системе уравнений Эйлера\*

$$F_y = \frac{d}{dx} F_{y'} = 0; \quad F_z = \frac{d}{dx} F_{z'} = 0, \quad (1)$$

где  $F(x, y, z, y', z') = n(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$ ;  $n(x, y, z)$  — показатель преломления воздуха.

В случае, если  $n$  не зависит явно от  $x$ , система (1) примет вид

$$nz'' = n_z'(1 + y'^2 + z'^2); \quad ny'' = n_y'(1 + y'^2 + z'^2). \quad (2)$$

\* Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4, изд. 3-е. — М.: Гостехтеориздат, 1957.

Решить эти уравнения даже в случае, когда  $n$  является элементарной функцией от  $z$  и  $y$ , строго не представляется возможным.

Поэтому в данной работе предлагается один из приближенных методов нахождения уравнения световой кривой.

Если заданы начальные условия, то решение системы (2) можно представить в виде рядов Тейлора.

Пусть для уравнений (2) начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} y|_{x=0} &= 0, & y'|_{x=0} &= \operatorname{ctg} \xi; \\ z|_{x=0} &= 0, & z'|_{x=0} &= \operatorname{ctg} \theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\xi$  и  $\theta$  — углы между проекцией касательной в точке  $x=0$  с осями  $oy$  и  $oz$  соответственно (рис. 1).

Отыщем решение задачи Коши для системы (2) в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned} z(x) &= z_0 + \frac{z_0''}{1!} x + \frac{z_0'''}{2!} x^2 + \dots + \frac{z_0^{(k)}}{k!} x^k + \dots; \\ y(x) &= y_0 + \frac{y_0'}{1!} x + \frac{y_0''}{2!} x^2 + \dots + \frac{y_0^{(m)}}{m!} x^m + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Значения производных, входящих в ряды, начиная с третьей, можно получить путем дифференцирования уравнений (2) в точке  $x=0$ :

$$z_0'' = \frac{n'_z}{n_0} (1 + \operatorname{ctg}^2 \xi + \operatorname{ctg}^2 \theta);$$

$$y_0'' = \frac{n'_y}{n_0} (1 + \operatorname{ctg}^2 \xi + \operatorname{ctg}^2 \theta);$$

$$z_0''' = \left( \frac{n''_{z_0 z_0}}{n_0} + \frac{2n'_{z_0}}{n_0} z_0'' - \frac{n'^2_{z_0}}{n_0^2} \right) \operatorname{ctg} \theta + \quad (5)$$

$$+ \left( \frac{n'_{z_0 y_0}}{n_0} + \frac{2n'_{z_0}}{n_0} y_0'' - \frac{n'_{z_0} n'_{y_0}}{n_0^2} \right) \operatorname{ctg} \xi;$$

$$y_0''' = \left( \frac{n''_{y_0 y_0}}{n_0} + \frac{2n'_{y_0}}{n_0} y_0'' - \frac{n'^2_{y_0}}{n_0^2} \right) \operatorname{ctg} \xi + \left( \frac{n'_{y_0 z_0}}{n_0} + \frac{2n'_{y_0}}{n_0} z_0'' - \frac{n'_{z_0} n'_{y_0}}{n_0^2} \right) \operatorname{ctg} \theta.$$

Решение можно было бы получить, если бы ряды (4) были сходящимися и если бы удалось найти их общие члены.

Рассмотрим ниже метод, который даже при невыполнении вышеуказанных замечаний приводит к решению поставленной задачи.

Области сходимости рядов зависят от величины  $x$ . Если функции  $y(x)$  и  $z(x)$  непрерывны и имеют все производные, то всегда можно найти такое  $x$ , для которого эти ряды будут сходиться. Предположим, что  $x=x$ , такое значение  $x$ , для которого