

торая будет изменяться только по величине, что, в свою очередь, повлечет за собой увеличение или уменьшение рефракционных влияний.

Список литературы: 1. Зюзин А. С. Боковая рефракция при измерении углов на пунктах городской полигонометрии. — Геодезия и картография, 1966, № 6. 2. Зюзин А. С. Характер температурного поля в городе и явление аномальной боковой рефракции. — Изв. АН СССР. Серия геофизическая, 1959, № 2. 3. Кратцер П. А. Климат города. — М.: ИЛ, 1958. 4. Пеллинен Л. П. Исследование по угловым измерениям в триангуляции. — Тр. ЦНИИГАиК, 1957, вып. 114. 5. Островский А. Л. Исследования по боковой рефракции в полигонометрии. — Львовский политехнический институт, 1958. 6. Островский А. Л. О суточном ходе угловых невязок треугольников, вызванных боковой рефракцией. — Научные записки ЛПИ. Серия геодезическая, 1962, вып. 82, № 7. 7. Тартачинский Р. М. Температурное поле города и его влияние на результаты угловых измерений в городской триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1974, вып. 19. 8. Тартачинский Р. М. Исследование боковой рефракции в экспериментальной городской сети триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1975, вып. 22. 9. Хаимов З. С. Исследование рефракции луча Лазера. — Геодезия и картография, 1968, № 2. 10. Хижак Л. С. К вопросу влияния рефракции в городской триангуляции. — Научные записки ЛПИ. Серия геодезическая, 1961, № 6. 11. Хренов Л. С., Коськов Б. И., Зимин К. И. Триангуляция Белграда (СФСЮ). — Геодезия и картография, 1967, № 8. 12. Шелейховский Г. В. Микроклимат южных городов. — М.: Медгиз, 1948. 13. Яковлев Н. В. Об учете климатических особенностей города при угловых измерениях в городской триангуляции I кл. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1960, № 6. 14. Яковлев Н. В. К теории и практике учета суточного хода рефракции при угловых измерениях и азимутальных определениях в геодезических сетях. — Геодезия и картография, 1969, № 3.

Статья поступила 14 февраля 1980 г.

УДК 528.3

Л. С. ХИЖАК, Д. И. МАСЛИЧ, И. И. ДИДУХ

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СВЕТОВОЙ КРИВОЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ РЕФРАКЦИИ

Известно, что в соответствии с принципом Ферма световая кривая удовлетворяет системе уравнений Эйлера*

$$F_y = \frac{d}{dx} F_{y'} = 0; \quad F_z = \frac{d}{dx} F_{z'} = 0, \quad (1)$$

где $F(x, y, z, y', z') = n(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$; $n(x, y, z)$ — показатель преломления воздуха.

В случае, если n не зависит явно от x , система (1) примет вид

$$nz'' = n_z'(1 + y'^2 + z'^2); \quad ny'' = n_y'(1 + y'^2 + z'^2). \quad (2)$$

* Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4, изд. 3-е. — М.: Гостехтеориздат, 1957.

Решить эти уравнения даже в случае, когда n является элементарной функцией от z и y , строго не представляется возможным.

Поэтому в данной работе предлагается один из приближенных методов нахождения уравнения световой кривой.

Если заданы начальные условия, то решение системы (2) можно представить в виде рядов Тейлора.

Пусть для уравнений (2) начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} y|_{x=0} &= 0, & y'|_{x=0} &= \operatorname{ctg} \xi; \\ z|_{x=0} &= 0, & z'|_{x=0} &= \operatorname{ctg} \theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где ξ и θ — углы между проекцией касательной в точке $x=0$ с осями oy и oz соответственно (рис. 1).

Отыщем решение задачи Коши для системы (2) в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned} z(x) &= z_0 + \frac{z_0''}{1!} x + \frac{z_0'''}{2!} x^2 + \dots + \frac{z_0^{(k)}}{k!} x^k + \dots; \\ y(x) &= y_0 + \frac{y_0'}{1!} x + \frac{y_0''}{2!} x^2 + \dots + \frac{y_0^{(m)}}{m!} x^m + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Значения производных, входящих в ряды, начиная с третьей, можно получить путем дифференцирования уравнений (2) в точке $x=0$:

$$z_0'' = \frac{n'_z}{n_0} (1 + \operatorname{ctg}^2 \xi + \operatorname{ctg}^2 \theta);$$

$$y_0'' = \frac{n'_y}{n_0} (1 + \operatorname{ctg}^2 \xi + \operatorname{ctg}^2 \theta);$$

$$z_0''' = \left(\frac{n''_{z_0 z_0}}{n_0} + \frac{2n'_{z_0}}{n_0} z_0'' - \frac{n'^2_{z_0}}{n_0^2} \right) \operatorname{ctg} \theta + \quad (5)$$

$$+ \left(\frac{n'_{z_0 y_0}}{n_0} + \frac{2n'_{z_0}}{n_0} y_0'' - \frac{n'_{z_0} n'_{y_0}}{n_0^2} \right) \operatorname{ctg} \xi;$$

$$y_0''' = \left(\frac{n''_{y_0 y_0}}{n_0} + \frac{2n'_{y_0}}{n_0} y_0'' - \frac{n'^2_{y_0}}{n_0^2} \right) \operatorname{ctg} \xi + \left(\frac{n'_{y_0 z_0}}{n_0} + \frac{2n'_{y_0}}{n_0} z_0'' - \frac{n'_{z_0} n'_{y_0}}{n_0^2} \right) \operatorname{ctg} \theta.$$

Решение можно было бы получить, если бы ряды (4) были сходящимися и если бы удалось найти их общие члены.

Рассмотрим ниже метод, который даже при невыполнении вышеуказанных замечаний приводит к решению поставленной задачи.

Области сходимости рядов зависят от величины x . Если функции $y(x)$ и $z(x)$ непрерывны и имеют все производные, то всегда можно найти такое x , для которого эти ряды будут сходиться. Предположим, что $x=x$, такое значение x , для которого

ряды (4) сходятся. Тогда для решения задачи промежутков $[0, 1]$, разобьем на интервалы (x_i, x_{i+1}) , для которых $|x_{i+1} - x_i| < \delta$ (рис. 2). На этом рисунке показана кривая, соответствующая первому уравнению системы (2).

Представим решение системы (2) рядом вида (4) на каждом интервале (x_i, x_{i+1}) , т. е.

$$z(x) = z_i + \frac{z'_i}{1!}(x - x_i) + \frac{z''_i}{2!}(x - x_i)^2 + \dots + \frac{z_i^{(k)}}{k!}(x - x_i)^k + \dots;$$

$$y(x) = y_i + \frac{y'_i}{1!}(x - x_i) + \frac{y''_i}{2!}(x - x_i)^2 + \dots + \frac{y_i^{(k)}}{k!}(x - x_i)^k + \dots,$$

$i = 0, 1, \dots,$

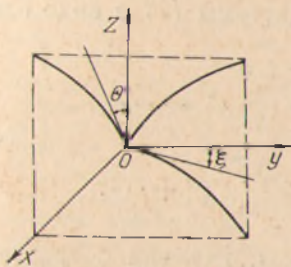


Рис. 1. Элементы световой кривой.

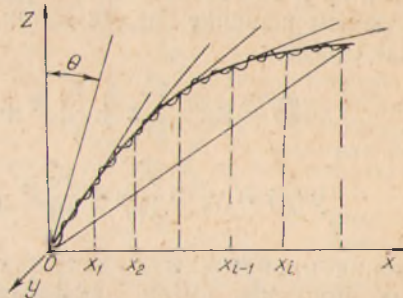


Рис. 2. Разбивка кривой по интервалам сходимости.

Тогда с какой-угодно степенью точности найдем уравнение световой кривой в каждом интервале в виде ряда, если известны условия Коши в начале каждого интервала.

Первое условие можно представить следующим образом:

$$z_i = z_{i-1} + \frac{z'_{i-1}}{1!}(x_i - x_{i-1}) + \frac{z''_{i-1}}{2!}(x_i - x_{i-1})^2 + \dots + \frac{z_{i-1}^{(k)}}{k!}(x_i - x_{i-1})^k + \dots;$$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{y'_{i-1}}{1!}(x_i - x_{i-1}) + \frac{y''_{i-1}}{2!}(x_i - x_{i-1})^2 + \dots + \frac{y_{i-1}^{(k)}}{k!}(x_i - x_{i-1})^k + \dots, \quad i = 1, 2, \dots,$$

Для нахождения второго условия используем первый интеграл решения системы (2) [1]

$$n = c \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

который после подстановки условия (3) будет иметь вид

$$n(0, 0) = \sqrt{\frac{1 + y'^2 + z'^2}{1 + \operatorname{ctg}^2 \xi + \operatorname{ctg}^2 \theta}}.$$

Тогда, используя (9), значение второго условия Коши для начала каждого интервала запишем в виде

$$z'_{i-1} = \frac{1}{\sin \xi \sin \theta} \sqrt{\frac{n^2(0, z_{i-1})}{n^2(0, 0)} (\sin^2 \theta + \sin^2 \xi \cos^2 \theta) - \sin^2 \theta};$$

$$y'_{i-1} = \frac{1}{\sin \xi \sin \theta} \sqrt{\frac{n^2(y_{i-1}, 0)}{n^2(0, 0)} (\sin^2 \xi + \sin^2 \theta \cos^2 \xi) - \sin^2 \xi},$$

где $n(0, z_{i-1})$ — значение показателя преломления в плоскости xoz , соответствующее значению $x = x_{i-1}$; $n(y_{i-1}, 0)$ — такое же значение в плоскости xoy .

Таким образом, решение задачи (2), (3) на промежутке $(0, x)$ можно представить в виде рядов (6).

В случае плоской кривой второе условие Коши, как нетрудно заметить, получится из (10) при ξ или $\theta = \pi/2$ и запишется в виде

$$z'_{i-1} = \sqrt{\frac{n^2(z_{i-1})}{n^2(0) \sin^2 \theta} - 1} \quad \text{или} \quad y'_{i-1} = \sqrt{\frac{n^2(y_{i-1})}{n^2(0) \sin^2 \xi} - 1},$$

а решение также представится в виде рядов (6).

Отметим, что такой прием решений дифференциальных уравнений применим не только при решении задачи Коши для уравнения Эйлера, но и для других подобных случаев.

Приведем модельный пример решения в случае плоской кривой. Пусть $n = 1/z$, тогда точное решение уравнения (2) при условиях $z/x=0 = 1$, $z'/x=0 = \operatorname{ctg} \xi$, $\xi = \pi/3$ равно 1,067.

При представлении рядом (4) на промежутке $[0-1]$ решение получим в виде

$$z = 1 + \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^2}{3} + \frac{2x^3}{3\sqrt{3}} - \frac{4x^4}{9} + \dots$$

Откуда $z(1) \approx 0,8417$.

Если представить решение рядами (6) при $i=2$ на промежутках $[0; 0,5]$, $[0,5; 1]$, получим

$$z = 1 + \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^2}{3} + \frac{2x^3}{3\sqrt{3}} - \frac{8x^4}{18} + \dots \quad y = 0$$

для промежутка $[0; 0,5]$ и

$$z = 1,138 + 0,195(x - 0,5) - \frac{2(x - 0,5)^2}{3,885} + \frac{0,13}{1,138}(x - 0,5)^3 + \dots$$

$$+ \frac{0,920797}{1,1387}(x - 0,5)^4 + \dots$$

для промежутка $[0,5; 1]$. Тогда $z(1) = 1,098$.

Как видно из приведенного примера, поинтервальное решение задачи при одинаковом количестве членов ряда приводит к более точному результату.

Статья поступила 11 апреля 1980 г.

УДК 522.92:528

П. Г. ЧЕРНЯГА

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СПУТНИКОВОЙ РЕФРАКЦИИ

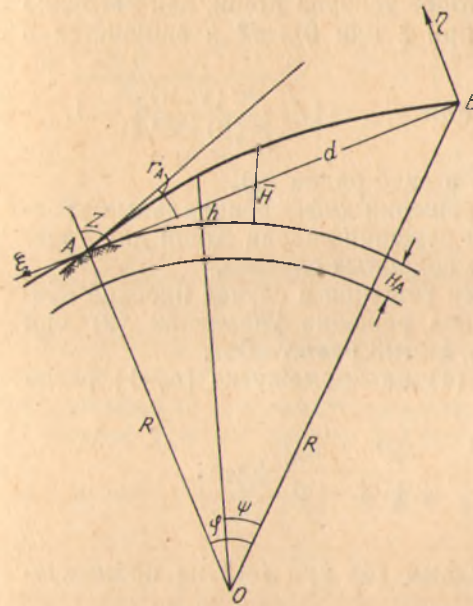
При обработке результатов наблюдений ИСЗ и других объектов, находящихся в земной атмосфере, необходимо учитывать спутниковую рефракцию. Однако существующие таблицы [1, 4] и методы [2, 3, 8] не всегда позволяют с необходимой точностью учитывать рефракцию, так как, во-первых, применяемые модели атмосферы не соответствуют реальному ее строению и, во-вторых, формулы поправок за рефракцию не обеспечивают требуемой точности для траекторий световых лучей, близких к горизонтальным. Вследствие этого возникает необходимость в дальнейшем совершенствовании методов определения поправок за рефракцию, которые по возможности учитывали бы действительное состояние атмосферы, а формулы поправок были бы освобождены от указанных выше недостатков.

Ход светового луча в земной атмосфере. В настоящей статье предлагается формула для вычисления спутниковой рефракции при наблюдении объектов в земной атмосфере на любых зенитных расстояниях с использованием информации о состоянии атмосферы на определенных высотах над поверхностью Земли.

Пусть атмосфера до некоторой высоты \bar{H} (рисунок) состоит из сферических слоев, плотность в которых находится в следующей экспоненциальной зависимости от высоты:

$$\rho = \exp(a_{0i} + a_{1i}h), \quad h_{i-1} \leq h \leq h_i, \quad (1)$$

где $i = 1, 2, 3 \dots m$; a_{0i}, a_{1i} — параметры i -го слоя.



Предположим далее, что на высотах, больших \bar{H} , плотность внутри j -го слоя (общее число таких слоев равно k) меняется линейно:

$$\rho = b_{0j} + b_{1j}h, \quad h_{j-1} \leq h \leq h_j, \quad (2)$$

где $j = 1, 2, 3, \dots, k$; b_{0j}, b_{1j} — параметры соответствующих слоев.

На рисунке обозначены: точка A — место наблюдения на поверхности Земли, принимаемой за шар радиуса $(R + H_A)$; объект наблюдения B находится на высоте H над поверхностью Земли; z — теоретическое зенитное расстояние; φ — геоцентрический угол между радиусами, проведенными через точку наблюдения и точку нахождения объекта; r_A — угол вертикальной спутниковой рефракции в точке A ; h — высота текущей точки траектории светового луча; ψ — геоцентрический угол между радиусами, проведенными через текущую точку траектории и точку нахождения объекта.

Для определения r_A в системе координат $\eta B \xi$, расположенной в вертикальной плоскости, содержащей радиус-вектор точки наблюдения и наблюдаемый объект, воспользуемся формулой [7]

$$r_A = \frac{1}{d} \int_0^d \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \eta} \xi d\xi, \quad (3)$$

где n — показатель преломления; d — длина линии по хорде.

Перейдем от прямоугольной системы $\eta B \xi$ к полярной с полюсом в точке O . Тогда координаты текущей точки световой кривой будут $(R + H_A + h)$ и ψ . Координаты $(R + H_A + h)$ и ψ выражаются через η и ξ следующим образом:

$$(R + H_A + h) = \sqrt{(R + H_A + H)^2 + 2(R + H_A + H) \times [\eta \sin(z - \varphi) - \xi \cos(z - \varphi) + \eta^2 + \xi^2]},$$

$$\Psi = \text{arccctg} \left\{ \frac{(R + H_A + H) \cos(z - \varphi) + \xi}{(R + H_A + H) \sin(z - \varphi) + \eta} \right\} - z + \varphi. \quad (4)$$

Так как в формулу (3) входит значение показателя преломления, то выразим его известной формулой

$$n = 1 + c_\lambda \rho, \quad (5)$$

где ρ — плотность атмосферы; c_λ — дисперсионный коэффициент для данной длины электромагнитного излучения, зависящий от физико-химических свойств среды.

Учитывая (1) и (2), формулу (5) для слоев, находящихся ниже некоторой высоты \bar{H} , можно записать в виде

$$n' = 1 + c_\lambda \exp \{ a_{0i} + a_{1i} [\sqrt{(R + H_A + H)^2 + 2(R + H_A + H) \times [\eta \sin(z - \varphi) - \xi \cos(z - \varphi)] + \eta^2 + \xi^2} - (R + H_A)] \},$$

$$n'_{i-1} \leq n' \leq n'_i, \quad (6)$$

где n'_i — показатель преломления в i -м слое.