его среднее или среднее весовое значение, принимая за веса масштабов, согласно работе [4], длины линий, т. е.

$$m_m = \frac{[m_{ij} \cdot S_{ij}]}{[S_{ij}]}, \tag{4}$$

или определяя веса в соответствии с точностью измерения длин линий.

Элементы сдвигов обычно находят после вычисления элементов a_{ij} ортогональной матрицы A так:

$$\begin{pmatrix} \delta X_0 \\ \delta Y_0 \\ \delta Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} - m \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Но вычисление элементов a_{ij} матрицы A по способу наименьших квадратов затруднительно, так как сумма квадратов остаточных расхождений координат общих пунктов должна быть минимальна, а элементы матрицы — удовлетворять условиям ортогональности (2). Для решения этой задачи предложены различные методы, которые можно разделить на две группы в зависимости от того, известна ли заранее структура матрицы A.

Зарубежные авторы [6, 7, 8] используют ортогональную матрицу (заданной структуры) Родригеса

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} d^2 + a^2 - b^2 - c^2 & 2ab - 2cd & 2ac + 2bd \\ 2ab + 2cd & d^2 - a^2 + b^2 - c^2 & 2bc - 2ad \\ 2ac - 2bd & 2bc + 2ad & d^2 - a^2 - b^2 + c^2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

или (при $d = 1$)

$$A = \frac{1}{1 + a^2 + b^2 + c^2} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 + a^2 - b^2 - c^2 & 2ab - 2c & 2ac + 2b \\ 2ab + 2c & 1 - a^2 + b^2 - c^2 & 2bc - 2a \\ 2ac - 2b & 2bc + 2a & 1 - a^2 - b^2 + c^2 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где a, b, c и d — неизвестные параметры.

Если допустить, что в выражении (6)

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1, \tag{8}$$

то матрица Родригеса примет вид

$$A = \begin{pmatrix} d^2 + a^2 - b^2 - c^2 & 2ab - 2cd & 2ac + 2bd \\ 2ab + 2cd & d^2 - a^2 + b^2 - c^2 & 2bc - 2ad \\ 2ac - 2bd & 2bc + 2ad & d^2 - a^2 - b^2 + c^2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Чаще всего элементы матрицы Родригеса вычисляют методом ее разложения на матрицы-множители (см. формулу (10)).

Так, канадский фотограмметрист Г. Схут [8] исходил из формулы преобразования вектора r в вектор r'

$$r' = (dI - S)^{-1}(dI + S) \cdot r, \tag{10}$$

где d — коэффициент; I — единичная матрица третьего порядка;

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$ — кососимметрическая матрица.

При этом вектор новых координат

$$\begin{pmatrix} r_x^1 \\ r_y^1 \\ r_z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c & -b \\ -c & d & a \\ b & -a & d \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -c & b \\ c & d & -a \\ -b & a & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где r_x^1, r_y^1, r_z^1 и r_x, r_y, r_z — проекции векторов r' и r на оси координат.

Произведение двух квадратных матриц в формуле (11) дает ортогональную матрицу (6). Умножая в уравнении (10) левую и правую части справа на $(dI - S)$, Г. Схут получил три линейных однородных уравнения с четырьмя неизвестными [8]:

$$\left.\begin{aligned} (z'+z)\cdot b + (y'+y)\cdot c + (x'-x)\cdot d &= 0 \\ (z'+z)\cdot a - (x'+x)\cdot c + (y'-y)\cdot d &= 0 \\ -(y'+y)\cdot a + (x'+x)\cdot b + (z'-z)\cdot d &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Уравнения (12) справедливы, если начала координат двух систем совпадают, а масштаб m равен единице. Но они однородны, не могут быть решены относительно неизвестных a, b, c, d. Однако Г. Схут пишет, что решает их по способу наименьших квадратов.

Обобщим метод определения параметров преобразования для общего случая, когда $m \neq 1$ и начала координат не совпадают, и покажем метод решения системы однородных уравнений (12). Запишем уравнение (11) в виде $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\begin{pmatrix} X_i' \\ Y_i' \\ Z_i' \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} d & c & -b \\ -c & d & a \\ b & -a & d \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -c & b \\ c & d & -a \\ b & a & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta X_0 \\ \delta Y_0 \\ \delta Z_0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Образуем из n таких уравнений среднее

$$\begin{matrix} X_m' \\ Y_m' \\ Z_m' \end{matrix} = m \begin{pmatrix} d & c & -b \\ -c & d & a \\ b & -a & d \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -c & b \\ c & d & -a \\ -b & a & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta X_0 \\ \delta Y_0 \\ \delta Z_0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Вычитая из уравнений (13) среднее уравнение (14), получим

$$\begin{pmatrix} \Delta X'_{im} \\ \Delta Y'_{im} \\ \Delta Z'_{im} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} d & c & -b \\ -c & d & a \\ b & -a & d \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -c & b \\ c & d & -a \\ -b & a & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta X_{im} \\ \Delta Y_{im} \\ \Delta Z_{im} \end{pmatrix} \cdot \qquad (15)$$

Умножим (15) слева на $(dI-S)$ и напишем

$$\begin{pmatrix} d & c & -b \\ -c & d & a \\ b & -a & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta X'_{im} \\ \Delta Y'_{im} \\ \Delta Z'_{im} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} d & -c & b \\ c & d & -a \\ -b & a & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta X_{im} \\ \Delta Y_{im} \\ \Delta Z_{im} \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

После преобразования получим три группы однородных уравнений

$$\left.\begin{aligned} & b\,(m\cdot\Delta Z_{im}+\Delta Z'_{im})-c\,(m\cdot\Delta Y_{im}+\Delta Y'_{im}+d\times \\ & \qquad \times(m\cdot\Delta X_{im}-\Delta X'_{im})=0 \\ & -a\,(m\cdot\Delta Z_{im}+\Delta Z'_{im})+c\,(m\cdot\Delta X_{im}+\Delta X'_{im}+d\times \\ & \qquad \times(m\cdot\Delta Y_{im}-\Delta Y'_{im})=0 \\ & a\,(m\cdot\Delta Y_{im}+\Delta Y'_{im})-b\,(m\cdot\Delta X_{im}+\Delta X'_{im}+d\times \\ & \qquad \times(m\cdot\Delta Z_{im}-\Delta Z'_{im})=0 \end{aligned}\right| . \qquad (17)$$

Чтобы устранить однородность, разделим уравнения (17) на $d\neq0$ и запишем

$$\left.\begin{aligned} & \frac{b}{d}(m\cdot\Delta Z_{im}+\Delta Z'_{im})-\frac{c}{d}(m\cdot\Delta Y_{im}+\Delta Y'_{im})+ \\ & \qquad +(m\cdot\Delta X_{im}-\Delta X'_{im})=0 \\ & -\frac{a}{d}(m\cdot\Delta Z_{im}+\Delta Z'_{im})+\frac{c}{d}(m\cdot\Delta X_{im}+\Delta X'_{im})+ \\ & \qquad +(m\cdot\Delta Y_{im}-\Delta Y'_{im})=0 \\ & \frac{a}{d}(m\cdot\Delta Y_{im}+\Delta Y'_{im})-\frac{b}{d}(m\cdot\Delta X_{im}+\Delta X'_{im})+ \\ & \qquad +(m\cdot\Delta Z_{im}-\Delta Z'_{im})=0 \end{aligned}\right| . \qquad (18)$$

Решив эти три группы уравнений по способу наименьших квадратов, найдем отношения $a:d$, $b:d$ и $c:d$ и согласно (8)

$$d=1:\sqrt{1+(a:d)^2+(b:d)^2+(c:d)^2}. \qquad (19)$$

Затем, получив d и зная отношения $\frac{a}{d}, \frac{b}{a}, \frac{c}{d}$, вычислим параметры a, b, c, элементы матрицы Родригеса (9) и сдвиги по осям (5). Этот метод в дальнейшем будем называть улучшенным методом Г. Схута или методом № 1. В 1965 г. К. Риннер [6] предложил метод, аналогичный методу Г. Схута, но уравнения (11) у него имеют такой вид:

$$\begin{pmatrix} \Delta X'_{i1} \\ \Delta Y'_{i1} \\ \Delta Z'_{i1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m\Delta X_{i1} \\ m\Delta Y_{i1} \\ m\Delta Z_{i1} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Произведение двух квадратных матриц в (20) дает ортогональную матрицу (7). Поэтому из системы (20) он, аналогично Г. Схуту, получил три группы уравнений

$$\left.\begin{aligned} & -b(\Delta Z'_{i1} + m\cdot\Delta Z_{is}) + c\cdot(\Delta Y'_{i1} + m\cdot\Delta Y_{i1}) + \\ & \qquad + (\Delta X'_{i1} - m\cdot\Delta X_{i1}) = 0 \\ & a(\Delta Z'_{i1} + m\cdot\Delta Z_{i1}) - c\cdot(\Delta X'_{i1} + m\cdot\Delta X_{i1}) + \\ & \qquad + (\Delta Y_{i1} - m\cdot\Delta Y_{i1}) = 0 \\ & -a(\Delta Y'_{i1} + m\cdot\Delta Y_{i1}) + b(\Delta X'_{i1} + m\cdot\Delta X_{i1}) + \\ & \qquad + (\Delta Z_{i1} - m\cdot\Delta Z_{i1}) = 0 \end{aligned}\right| . \quad (21)$$

Далее он использовал для определения параметров b и c два уравнения первой группы

$$\left.\begin{aligned} & -b(\Delta Z'_{21} + m\cdot\Delta Z_{21}) + c\cdot(\Delta Y'_{21} + m\cdot\Delta Y_{21}) + \\ & \qquad + (\Delta X'_{21} - m\cdot\Delta X_{21}) = 0 \\ & -b(\Delta Z'_{31} + m\cdot\Delta Z_{31}) + c(\Delta Y'_{31} + m\cdot\Delta Y_{31}) + \\ & \qquad + (\Delta X'_{31} - m\cdot\Delta X_{31}) = 0 \end{aligned}\right| . \quad (22)$$

Аналогично с помощью уравнений второй группы из (21) он вычислял a и c (с контролем по c).

Но так как при этом число уравнений больше числа неизвестных, то для наилучшего согласования координат коэффициенты a, b и c следует находить по способу наименьших квадратов, а для уменьшения влияния ошибок координат брать разности не между i-м пунктом и первым, а между i-м пунктом и средним. Назовем такой метод улучшенным методом Риннера или методом № 2.

Группа советских фотограмметристов [4] предложила итерационный метод вычисления элементов ортогональной матрицы преобразования (метод № 3). Матрица A ими была задана в виде

$$A = \left|\begin{matrix} \cos\alpha\cdot\cos\varkappa - \sin\alpha\sin\omega\cdot\sin\varkappa; \\ -\cos\alpha\cdot\sin\varkappa - \sin\alpha\cdot\sin\omega\cdot\cos\varkappa - \sin\alpha\cdot\cos\omega \\ \cos\omega\cdot\sin\varkappa; \qquad \cos\omega\cdot\cos\varkappa; \qquad -\sin\omega \\ \sin\alpha\cdot\cos\varkappa + \cos\alpha\cdot\sin\omega\cdot\sin\varkappa; \\ -\sin\alpha\cdot\sin\varkappa + \cos\alpha\cdot\sin\omega\cdot\cos\varkappa; \qquad \cos\alpha\cdot\cos\omega \end{matrix}\right| , \quad (23)$$

где α, ω и $\varkappa$ — угловые элементы внешнего ориентирования.

Если подставить (23) в (1) и найти производные:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X'}{\partial\delta X_0}=1;\quad \frac{\partial Y'}{\partial\delta Y_0}=1;\quad \frac{\partial Z'}{\partial\delta Z_0}=1\\
&\frac{\partial X'}{\partial\alpha}=-m\,(a_{31}X+a_{32}Y+a_{33}Z);\\
&\frac{\partial X'}{\partial\omega}=-m\cdot\sin\alpha\,(a_{21}X+a_{22}Y+a_{23}Z);\\
&\frac{\partial X'}{\partial\varkappa}=m\,(a_{12}X-a_{11}Y);\quad \frac{\partial X}{\partial m}=a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}Z;\\
&\frac{\partial Y'}{\partial\alpha}=0;\ \frac{\partial Y'}{\partial\omega}=m\cdot(-\sin\omega\cdot\sin\varkappa-\sin\omega\cdot\cos\varkappa\cdot Y-\cos\omega\cdot Z);\\
&\frac{\partial Y'}{\partial\varkappa}=m\,(a_{22}X+a_{21}Y);\quad \frac{\partial Y'}{\partial m}=a_{21}X+a_{22}Y+a_{23}Z;\\
&\frac{\partial Z'}{\partial\alpha}=m\,(a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}Z);\\
&\frac{\partial Z'}{\partial\omega}=m\cdot\cos\alpha\cdot(a_{21}X+a_{22}Y+a_{23}Z);\\
&\frac{\partial Z'}{\partial\varkappa}=m\,(a_{32}X-a_{31}Y);\quad \frac{\partial Z'}{\partial m}=a_{31}X+a_{32}Y+a_{33}Z,
\end{aligned}\right\}, \tag{24}$$

то можно составить уравнения погрешностей

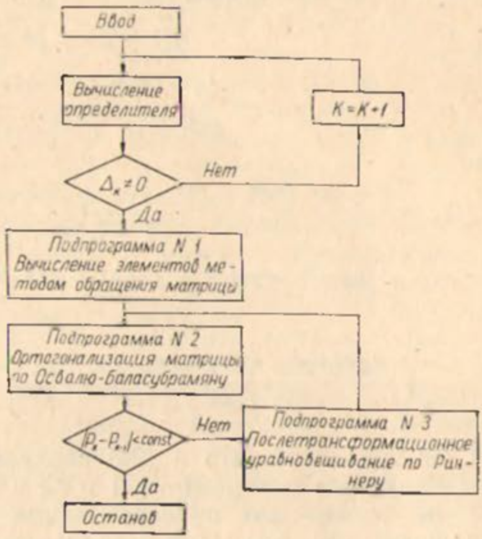
$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X_i'}{\partial\delta X_0}\cdot d\delta X_0+\frac{\partial X_i'}{\partial\alpha}\cdot d\alpha+\frac{\partial X_i'}{\partial\omega}\cdot d\omega+\frac{\partial X_i'}{\partial\varkappa}\cdot d\varkappa+\frac{\partial X_i'}{\partial m}\times\\
&\qquad\times dm+l_{xi}=v_{xi};\\
&\frac{\partial Y_i'}{\partial\delta_i' Y_i}\cdot d\delta Y_0+\frac{\partial Y_i'}{d\alpha}\cdot d\alpha+\frac{\partial Y_i'}{\partial\omega}\cdot d\omega+\frac{\partial Y_i'}{\partial\varkappa}\,d\varkappa+\frac{\partial Y_i'}{\partial m}\times\\
&\qquad\times dm+l_{yi}=v_{yi};\\
&\frac{\partial Z_i'}{\partial\delta Z_0}\cdot d\delta Z_0+\frac{\partial Z_i'}{\partial\alpha}\cdot d\alpha+\frac{\partial Z_i'}{\partial\omega}\cdot d\omega+\frac{\partial Z_i'}{\partial\varkappa}\cdot d\varkappa+\frac{\partial Z_i'}{\partial m}\times\\
&\qquad\times\partial m+l_{zi}=v_{zi}
\end{aligned}\right\}. \tag{25}$$

Из их решения по способу наименьших квадратов (если известны координаты хотя бы трех пунктов в обеих системах) находят поправки в исходные параметры $d\delta X_0$, $d\delta Y_0$, $d\delta Z_0$, $d\alpha$, $d\omega$, $d\varkappa$ и dm. Затем определяются уточненные значения

$$
\left.\begin{aligned}
(\delta X_0)_{k+1} &= (\delta X_0)_k + (d\delta X_0)_k; \; \alpha_{k+1} = \alpha_k + d\alpha_k;\\
(\delta Y_0)_{k+1} &= (\delta Y_0)_k + (d\delta Y_0)_k; \; \omega_{k+1} = \omega_k + d\omega_k;\\
(\delta Z_0)_{k+1} &= (\delta Z_0)_k + (d\delta Z_0)_k; \; \varkappa_{k+1} = \varkappa_k + d\varkappa_k;\\
& m_{k+1} = m_k + dm_k,
\end{aligned}\right\} \quad (26)
$$

где k — номер цикла.

В 1979 г. В. Кириллов на основе анализа способа Освалю-Баласубраманяна [7] и способа «послетрансформационного уравнивания» Риннера [6] разработал метод определения элементов ортогональной матрицы преобразования. При использовании этого метода не нужно знать структуру ортогональной матрицы и знак определителя Δ. Его блок-схема показана на рисунке. Такой способ назовем комплексным или методом № 4.



Блок-схема комплексного метода.

Мы обработали пять моделей сетей всеми четырьмя методами. В четырех моделях преобразование производилось с большими углами поворота (порядка нескольких десятков градусов), различными масштабами (от 1,0000000 до 0,2499996) и сдвигами от нескольких десятков метров до нескольких тысяч километров *. В модели № 5 производилось преобразование квазигеоцентрических систем координат при малых их изменениях.

Определители Δ матриц вращения были приняты равными +1 или —1, т. е. использовали модели с собственным и несобственным вращениями **. В координаты были внесены случайные погрешности от нескольких десятых долей метров до нескольких десятков метров.

Анализ вычислений показал, что комплексный метод дает хорошие результаты для любых моделей сетей независимо от знака определителя матрицы преобразования, ее структуры и величин параметров преобразования. Для определения элементов ортогональной матрицы достаточно выполнить 2—3 приближения.

* При переходе от топоцентрической системы к геоцентрической.

** При несобственном вращении изменяется ориентация трех базисных векторов (левая система переходит в правую).

Оба определителя Δ матриц (6) и (7) равны $+1$. Действительно,

$$\Delta_6 = \frac{d^6 + a^6 + b^6 + c^6 + 3a^2 d^4 + 3b^2 d^4 + 3c^2 d^4 + 3a^4 d^2}{(d^2 + a^2 + b^2 + c^2)^3} +$$

$$+ \frac{3a^4 b^2 + 3a^4 c^2 + 3b^4 d^2 + 3a^2 b^4 + 3b^4 c^2 + 3c^4 d^2 + 3a^2 c^4}{(d^2 + a^2 + b^2 + c^2)^3} +$$

$$+ \frac{3b^2 c^4 + 6a^2 b^2 c^2 + 6a^2 b^2 d^2 + 6a^2 c^2 d^2 + 6b^2 c^2 d^2}{(d^2 + a^2 + b^2 + c^2)^3} =$$

$$= \frac{(d^2 + a^2 + b^2 + c^2)^3}{(d^2 + a^2 + b^2 + c^2)^3} = +1 \qquad (27)$$

и

$$\Delta_7 = \frac{1 + a^6 + b^6 + c^6 + 3a^4 + 3b^4 + 3c^4 + 3a^2 + 3b^2 + 3c^2}{(1 + a^2 + b^2 + c^2)^3} +$$

$$+ \frac{3a^4 b^2 + 3a^4 c^2 + 3a^2 b^4 + 3b^4 c^2 + 3a^2 c^4 + 3b^2 c^4 + 6}{(1 + a^2 + b^2 + c^2)^3} +$$

$$+ \frac{6a^2 b^2 c^2 + 6a^2 c^2 + 6b^2 c^2}{(1 + a^2 + b^2 + c^2)^3} = \frac{(1 + a^2 + b^2 + c^2)^3}{(1 + a^2 + b^2 + c^2)^3} = +1. \qquad (28)$$

Из уравнений (27) и (28) следует, что по свойствам матрицы Родригеса методами № 1 и № 2 можно определять элементы a_{ij} только для преобразований, включающих собственное вращение ($\Delta = +1$). При несобственном вращении ($\Delta = -1$) переход от одной системы координат к другой этими методами можно осуществить, если в одной из систем поменять местами оси X и Y. Но в этом случае в связи с заменой осей параметры преобразования будут иными.

Прежде чем вычислять элементы a_{ij} методами № 1 и № 2 необходимо установить знак определителя преобразования. Для этого мы предлагаем вычислять вспомогательную величину (масштаб объемов)

$$q = \begin{vmatrix} X'_2 - X'_1 & X'_3 - X'_1 & X'_4 - X'_1 \\ Y'_2 - Y'_1 & Y'_3 - Y'_1 & Y'_4 - Y'_1 \\ Z'_2 - Z'_1 & Z'_3 - Z'_1 & Z'_4 - Z'_1 \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & X_3 - X_1 & X_4 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 & Y_3 - Y_1 & Y_4 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 & Z_3 - Z_1 & Z_4 - Z_1 \end{vmatrix}, \qquad (29)$$

знак которой совпадает со знаком определителя преобразования.

При исследовании метода № 3 мы в конце каждого цикла вычисляли среднее квадратическое расхождение δ_k между преобразованными и исходными координатами по формуле

$$p_k = \sqrt{\frac{[(X'_k - X'_{\text{исх}})^2] + [Y'_k - Y'_{\text{исх}}]^2 + [Z'_k - Z'_{\text{исх}}]^2}{3 \cdot n}}. \qquad (30)$$

Останов ЭВМ происходил, когда расхождения $|\delta_k - \delta_{k-1}|$ между величинами δ для двух последующих циклов было меньше 0,001 м. Вначале принимались значения параметров: $m=1$; $\alpha = 0{,}01$; $\omega = 0{,}01$; $\varkappa = 0{,}01$; $\delta X_0 = 10$ м.; $\delta Y_0 = 10$ м.; $\delta Z_0 = 10$ м.

Определитель матрицы (23) также равен $+1$. Поэтому прежде чем осуществлять преобразование методом № 3, необходимо установить знак определителя с помощью формулы (29) и если он отрицательный, то поменять оси X и Y в одной из систем или взять матрицу (23) другой структуры (при $\Delta = -1$) с последующей заменой производных (24).

Для определения параметров преобразования этим методом нужно приближенно знать элементы внешнего ориентирования. Если они неизвестны, то их можно определить, при условии, что структура матрицы, которую подставляли в (1) при нахождении производных (24), и структура матрицы данного преобразования совпадают. Но практически проверить совпадение структур матриц нельзя. Поэтому в работе [3] вводится еще одна система координат—переходная, которая устанавливается так, чтобы координаты пунктов в ней возможно меньше отличались от фотограмметрических. Переход от квазигеоцентрической (X, Y, Z) системы к переходной ($X_{\text{п}}$, $Y_{\text{п}}$, $Z_{\text{п}}$) осуществляется так [3]:

$$\begin{pmatrix} \Delta X_{\text{п}im} \\ \Delta Y_{\text{п}im} \\ \Delta Z_{\text{п}im} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\sin L_0 \sin B_0 \cos A_x - \sin A_x \sin L_0; & -\sin L_0 \sin B_0 \cos A_x + \cos L_0 \sin A_x; & \cos B_0 \cos A_x \\ -\cos L_0 \sin B_0 \sin A_x + \sin L_0 \cos A_x; & -\sin L_0 \sin B_0 \sin A_x - \cos L_0 \cos A_x; & \cos B_0 \sin A_x \\ \cos L_0 \cos B_0; & \sin L_0 \cos B_0; & \sin B_0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_{im} \\ \Delta Y_{im} \\ \Delta Z_{im} \end{pmatrix}, \qquad (31)$$

где L_0 и B_0 — геодезические координаты «центра тяжести» опорных точек блока или маршрута; A_x — азимут оси $X_{\text{п}}$ переходной системы. Преобразование координат из фотограмметрической системы в переходную производится методом № 3. Число приближений (5—8) не зависит от величин параметров преобразования.

Отличительной чертой метода № 3 является одновременное вычисление поправок во все 7 параметров, в то время как в других методах сдвиги определяются по формулам (5) после вычисления элементов матрицы и масштаба.

Если $\Delta=+1$ и структура матрицы преобразования совпадает со структурой матрицы, которую вводили в формулу (1) при нахождении производных (24), то все четыре метода дают практически одинаковые результаты (см. таблицу). Таким образом, рассмотренные методы вычисления элементов ортогональной матрицы преобразования при соблюдении указанных выше условий дают идентичные результаты.

Сводка результатов вычислений параметров преобразования *

Методы	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
a_{11}	0,95857914	0,95857921	0,95857915	0,95857914
a_{12}	—0,16421117	—0,16421114	—0,16421117	—0,16421117
a_{13}	—0,23272455	—0,23272432	—0,23272455	—0,23272454
a_{21}	0,18680220	0,18680212	0,18680220	0,18690220
a_{22}	0,97925947	0,97925950	0,97925947	0,97925947
a_{23}	0,07845907	0,07845899	0,07845908	0,07845908
a_{31}	0,21501386	0,21501366	0,21501386	0,21501386
a_{32}	—0,11868268	—0,11868268	0,11868268	—0,11868268
a_{33}	0,96937271	0,96937278	—0,96937272	0,96937271
δX_0	3155,734 м	3155,742 м	3155,740 м	3155,741 м
δY_0	—2731,908 м	—2731,906 м	—2731,908 м	—2731,908 м
δZ_0	—1409,118 м	—1409,115 м	—1409,117 м	—1409,117 м
m	0,24999975	0,24999939	0,24999965	0,24999965
δ	0,002	0,002	0,001	0,002
Число прибл.	—	—	7	2

* Исходные данные (см. ниже) взяты из работы [6].

	X	Y	Z	X'	Y'	Z'
P_1	1823,74	3511,41	2023,12	3330,93	—1747,31	—924,98
P_2	18645,34	1833,50	8073,14	7079,09	—1252,94	1495,20
P_3	14402,33	1492,30	2249,09	6415,06	—1649,86	—134,17
P_4	6003,79	2470,93	9698,24	3928,82	—1656,38	1190,59

При определении элементов ортогональной матрицы первыми тремя методами нужно предварительно вычислить вспомогательную величину q (29), знак которой совпадает со знаком определителя Δ. Если определитель отрицателен, то нужно поменять оси X и Y в одной из систем. Элементы a_{ij} матрицы после замены будут вычислены неверно, но расхождения между преобразованными и исходными координатами будут минимальны.

Если элементы внешнего ориентирования неизвестны, а углы поворота значительны, то при переходе от одной системы к другой с помощью метода № 3 нужно, как предлагается в работе [3], вводить переходную систему координат. Элементы внешнего ориентирования при переходе из фотограмметрической системы в переходную малы и их вычисление не зависит от структуры матрицы.

Комплексный метод позволяет за 2—3 приближения вычислить элементы ортогональной матрицы неизвестной структуры и дает хорошие результаты независимо от знака определителя.

Результаты выполненных исследований могут применяться в космической геодезии и аналитической фотограмметрии.

Список литературы: 1. *Буткевич А. В., Кириллов В. Г.* О возможных преобразованиях пространственных прямоугольных координат в спутниковой геодезии. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1980, вып. 31. 2. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1971. 3. *Лобанов А. Н.* Аналитическая фотограмметрия. — М.: Недра, 1972. 4. Фототриангуляция с применением электронной цифровой вычислительной машины. — М.: Недра, 1975. 5. *Oswal H. L., Balasubramanian S.* An exact solution of absolute orientation. — Photogrammetric Engineering, 1968, **34**, № 10. 6. *Rinner K.* Die räumliche Drehstreckung. — Acta technica Academiae Scientiarum Hungaricae, 1965, **52**, № 3—4. 7. *Sanso F.* An exact solution of the rototranslation problem. — Photogrammetria, 1973, **29**, № 6. 8. *Schut G. H.* On exact linear equation for the computation of the rotational elements of absolute orientation. — Photogrammetria, 1960, **17**, № 1.

Статья поступила в редколлегию 20.02.81

УДК 528.35

УДК 528.236

А. В. БУТКЕВИЧ, В. Г. КИРИЛЛОВ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ

Преобразование координат из одной пространственной прямоугольной системы в другую выражается формулой [1]

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = m \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta X_0 \\ \delta Y_0 \\ \delta Z_0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где m — масштаб преобразования; δX_0, δY_0, δZ_0 — сдвиги по осям координат;

A — ортогональная матрица преобразования (вращения), т. е. такая матрица, для которой транспонированная матрица равна обратной:

$$A^T = A^{-1}. \qquad (2)$$

Линейный масштаб преобразования m_{ij} можно вычислить по формуле

$$m_{ij} = \sqrt{\frac{(X'_i - X'_j)^2 + (Y'_i - Y'_j)^2 + (Z'_i - Z'_j)^2}{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2}}. \qquad (3)$$

Но так как координаты в формуле (3) имеют ошибки, то по разным линиям получаются неодинаковые масштабы и для получения вероятнейшего значения масштаба следует находить