

В. А. ВИЛЕНСКИЙ

ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

В геодезической практике, благодаря простоте и экономичности, широкое применение нашли приближенные формулы предрасчета точности планового обоснования. Такие формулы получают для некоторых идеальных геометрических построений в предположении равноточности измерений и применяют их для оценки реальных сетей.

Однако реальные сети всегда в той или иной степени отличаются от моделей. Поэтому большой интерес представляет усовершенствование имеющихся интерполяционных формул и получение новых, позволяющих учитывать степень этого отличия.

Качество априорной оценки точности геодезических сетей, выполненной с помощью приближенных формул, определяют, кроме точности самих интерполяционных формул, главным образом следующие факторы:

- степень уклонения геометрической формы реальной сети от модели;
- неучет неравноточности измерений.

Настоящая статья посвящена изучению действия этих факторов.

Для проведения исследований была составлена программа «Сетка» на языке фортран-4 применительно к ЕС ЭВМ, предназначенная для уравнивания и оценки точности комбинирован-

ных геодезических сетей. В программе реализован параметрический метод уравнивания.

1. Исследование влияния степени уклонения геометрической формы реальных сетей от модели на точность априорной оценки. Очевидно, что при прочих равных условиях расхождение между точностью реальной сети и идеальной модели тем больше, чем больше различие их геометрических форм.

Целью настоящих исследований является определение эмпирических формул, позволяющих оценить расхождение между

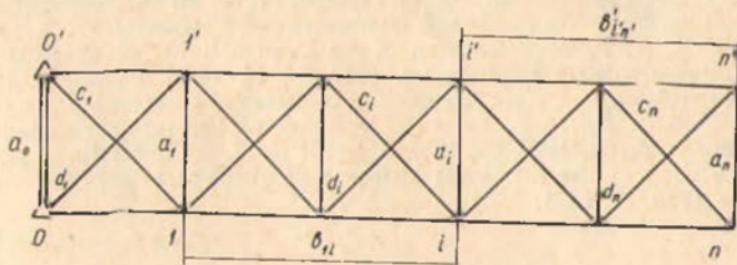


Схема сетей трилатерации.

точностью оцениваемых элементов реальных сетей и идеальных моделей в зависимости от степени различия их геометрических форм.

Рассмотрим одинарные ряды следующих трех моделей трилатерации (см. рисунок):

1. Цепь из геодезических квадратов [4]. В цепи измеряются стороны: $a_j, b_{j-1, j}, b'_{j-1, j}, c_j, d_j$ ($j=1, n$, т. е. $j=1, 2, \dots, n$).

2. Цепь трилатерации из квадратов, звенья диагоналей которой измеряются в комбинациях [1]. В цепи измеряются стороны: $a_j, b_{0, j}, b'_{0, j}, c_j, d_j$ ($j=1, n$).

3. Цепь трилатерации из геодезических квадратов, звенья диагоналей которой измеряются во всех комбинациях [2]. В цепи измеряются стороны: $a_i, b_{k, j}, b'_{k, j}, c_j, d_j$ ($k=0, n-1, j=1, n$).

Положим, что стороны квадратов равны 1000 м и измерения выполняются равноточно со средней квадратической ошибкой $\mu=1$ см.

Вначале была произведена сплошная оценка точности указанных моделей, состоящих из девяти фигур. Далее, каждую из моделей мы «разворачивали» (искажали) по случайному закону и выполняли для каждой полученной таким образом сети сплошную оценку точности. Для этого к программе «Сетка» подключался датчик случайных чисел — программа *GAUSS* (i, A, h, v) из стандартной библиотеки подпрограмм ЕС ЭВМ. С помощью этого датчика вырабатывались случайные числа v_x и v_y со средним квадратическим размахом h и математическим ожиданием $A=0, 0$. Прибавляя затем к координатам x_j и y_j -пунктов исследуемых моделей значения v_x и v_y , мы получали ряды, геометрическая форма которых отличалась от геометриче-

кой формы модели, причем тем больше, чем больше величина H . В дальнейшем в качестве меры отклонения геометрической формы реальных сетей от моделей будем также пользоваться безразмерной величиной

$$H = \frac{h}{s} \cdot 100\%, \quad (1)$$

где s — среднее расстояние между соседними пунктами в неискаженной модели. Для исследуемых сетей $s=1000$ м.

В настоящих расчетах принималось $h=j \cdot 20$, где $j=1, 2, \dots, 7$. Для каждой из перечисленных выше моделей и семи значений H выполнялась сплошная оценка точности для десяти вариантов сетей. Полученные результаты — продольный m_t и попеченный m_u сдвиги пунктов и ошибки m_α дирекционных углов связующих сторон сравнивались с аналогичными величинами, соответствующими идеальной неискаженной модели, и вычислялись расхождения между ними.

Таблица 1
Учет степени уклонения геометрической формы
реальных сетей вида I—III
на качество их априорной оценки точности

Модель	Δm	$H, \%$						
		2	4	6	8	10	12	14
Модель I	Δm_u	1,4	3,0	6,4	7,6	8,4	14,6	16,4
	Δm_t	2,1	3,9	6,9	8,4	10,4	13,6	18,9
	Δm_α	1,6	3,2	5,1	5,1	8,0	14,4	15,5
Модель II	Δm_u	2,4	3,3	7,6	13,6	11,0	11,2	16,6
	Δm_t	0,8	1,7	2,3	3,4	4,1	3,9	5,4
	Δm_α	2,6	5,4	7,9	9,7	12,8	14,9	22,5
Модель III	Δm_u	2,0	3,0	6,9	11,4	9,8	10,7	14,1
	Δm_t	1,6	2,6	5,0	7,8	7,9	7,5	13,2
	Δm_α	1,4	2,9	6,6	9,8	9,5	13,6	20,8

В табл. 1 для перечисленных трех моделей каждого H приведены осредненные по всем пунктам и по всем десяти вариантам значения $\Delta m_u \%$, $\Delta m_t \%$, $\Delta m_\alpha \%$. Указанные оценки являются статистически состоятельными, поскольку определены из достаточно большой выборки $l=180$.

Анализируя данные, приведенные в табл. 1, видим, что:

- расхождение в точности реальных сетей и моделей с увеличением H растет, причем растет для всех трех моделей приблизительно одинаково;
- продольный сдвиг пунктов в сетях второго вида в 2,5 раза менее чувствителен к искажению геометрической формы сети, чем те же величины в других моделях.

На основании данных табл. 1 нетрудно составить обобщенное (осредненное) уравнение регрессии для рассматриваемых трех моделей при $H \leq 14\%$

$$\Delta m (\%) \simeq H (\%). \quad (2)$$

Для продольного сдвига пунктов второй модели

$$\Delta m_t^H = 0,4H (\%). \quad (3)$$

Согласно теории МНК предельное значение ошибки измерений в 2—3 раза больше, чем средняя квадратическая ошибка. С учетом сказанного, для предельного случая формулы (2) и (3) примут вид:

$$\bar{\Delta m} (\%) \simeq 3H (\%), \quad (4)$$

$$\Delta m_t (\%) \simeq 1,2H (\%). \quad (5)$$

Если теперь нам задана средняя квадратическая или предельная ошибка, с которой мы должны *a priori* оценить жесткость геодезической сети, то с помощью формул (2)—(5) можно определить допустимый размах в положении пунктов относительно неискаженной модели. И наоборот, если для конкретной исследуемой сети вычислен средний квадратический размах h в положении пунктов относительно неискаженной модели и среднее расстояние s между соседними пунктами, то по формулам (2)—(5) можно рассчитать точность самой априорной оценки.

Например, если требуется, чтобы расхождение между точностью реальной сети и неискаженной первой моделью, вызванное лишь различием геометрической формы, не превышало 20% при среднем расстоянии между соседними пунктами 2000 м, то на основании формулы (4) можно определить допустимый средний квадратический размах в положении пунктов

$$h = \frac{\Delta m (\%) \cdot s}{3 \cdot 100\%} = \frac{20 (\%) \cdot 2000 \text{ м}}{3 \cdot 100\%} \simeq 133 \text{ м}. \quad (6)$$

Таким образом, если среднее квадратическое отклонение в положении пунктов не более 133 м, то погрешность априорной оценки не будет превышать 20%.

2. Учет неравноточности измерений. Все имеющиеся формулы предрасчета точности сетей трилатерации получены для случая равноточных измерений. На практике в большинстве случаев мы имеем дело с неравноточными линейными измерениями, т. е. с измерениями, производимыми приборами, в которых оба коэффициента c и k уравнения регрессии (7) не равны нулю

$$m_D = c + kD \cdot 10^{-6}. \quad (7)$$

Поэтому вопрос о возможности использования имеющихся приближенных формул, соответствующих равноточным измерениям для неравноточного случая, требует дополнительного ис-

следования. В частности, большой интерес представляет установление зависимости между соответствующими характеристиками точности для равно- и неравноточного случаев. Эта зависимость позволит, кроме всего прочего, определять, в каких случаях можно пренебречь неравноточностью измерений и при априорной оценке пользоваться формулами, которые соответствуют идеальным моделям [3].

В общем случае искомая функция может быть представлена в виде

$$1/P_n = 1/P_p \cdot f(j, i, c, k, q), \quad (8)$$

где $1/P_p$ и $1/P_n$ — обратные веса оцениваемых элементов сетей соответственно для равно- и неравноточных измерений; j — показатель конструкции сети; i — номер оцениваемого элемента сети относительно исходных данных; c и k — коэффициенты уравнения регрессии; q — масштаб сети.

Цель настоящих исследований — определение вида функции (8) для первой модели трилатерации из геодезических квадратов.

Для определения искомой функции была выполнена сплошная оценка точности сетей, состоящих из $n=12$ квадратов со сторонами $a=0,4$ км и $a=1$ км. Предполагалось, что стороны в указанных сетях измеряются каждым из семи различных электронных дальномеров, имеющих различные коэффициенты уравнений регрессии. Всего таким образом была выполнена оценка точности 14 различных моделей. При выполнении уравнительных вычислений веса, вводимые в уравнения погрешностей, вычислялись по формуле

$$p_D = \frac{c^2}{m_D^2}. \quad (9)$$

Результаты оценки точности исследуемых моделей приведены в табл. 2.

Из анализа данных, приведенных в табл. 2, видно, что при построении одних и тех же сетей различными приборами при одинаковых значениях отношения k/c обратные веса оцениваемых элементов сетей — одинаковые, а с увеличением этого отношения значения $1/P$ возрастают. Из таблицы видно также, что при использовании одних и тех же приборов увеличение масштаба сети также ведет к увеличению значений оцениваемых элементов сетей. В результате дальнейшего анализа данных, приведенных в табл. 2, удалось определить связь между точностью положения элементов сетей для равно- и неравноточного случаев. Аналитическое выражение этой связи для обратных весов продольного и поперечного сдвигов пунктов сетей имеет вид:

$$1/P_n = 1,079^{\frac{1}{c}} \cdot 1/P_p. \quad (10)$$

Таблица 2

Результаты оценки точности сетей трилатерации вида I
для равно- и неравноточного случаев

$\frac{1}{P_t}$	Пункт i	Коэффициенты уравнений регрессии												
		С К		С К		С К		С К		С К		С К		
		1	0	1	1	1	2	1	3	0,5	2	2	2	
$a = 0,4 \text{ км}$														
$\frac{1}{P_{t_i}}$	3	2,66		2,88		3,12		3,36		3,61		2,88		3,24
	6	5,36		5,81		6,28		6,77		7,26		5,81		6,52
	9	8,06		8,74		9,44		10,17		10,92		8,74		9,80
	12	10,76		11,64		12,57		13,58		14,67		11,64		13,10
$\frac{1}{P_u_i}$	3	20,7		22,5		24,4		26,4		28,4		22,5		25,4
	6	149,2		161,7		174,9		188,5		202,2		161,7		181,6
	9	493,7		534,7		578,0		622,7		667,6		534,7		599,8
	12	1162,2		1273,5		1373,0		1480,0		1595,4		1273,5		1416,3
$a = 1,0 \text{ км}$														
$\frac{1}{P_{t_i}}$	3	2,66		3,24		3,87		4,55		5,28		3,24		4,20
	6	5,36		6,53		7,79		9,17		10,63		6,54		8,46
	9	8,06		9,81		11,71		13,78		15,98		9,81		12,71
	12	10,76		13,10		15,63		18,38		21,32		13,11		16,96
$\frac{1}{P_{u_i}}$	3	20,7		25,4		30,5		36,1		42,0		25,4		33,2
	6	149,2		182,1		216,9		255,3		295,3		182,1		235,2
	9	493,7		602,0		715,8		841,5		971,8		602,0		775,7
	12	1162,2		1416,3		1683,1		1977,7		2283,0		1419,1		1823,8

Было установлено, что погрешность полученной формулы по внутренней сходимости не превышает 2—3%. Полученная формула (10) справедлива только для цепи квадратов со сторонами $a = 0,4 \text{ км}$. Для этих сторон согласно (7)

$$m_a = c + 0,4k \cdot 10^{-6}. \quad (11)$$

Если сторона квадратов $a = 1 \text{ км}$, то

$$m_a = c + 1,0k \cdot 10^{-6}, \quad (12)$$

или

$$m_a = c + 0,4k' \cdot 10^{-6}, \quad \text{где } k' = 2,5k. \quad (12a)$$

Следовательно, для оценки продольного и поперечного сдвигов пунктов цепи трилатерации из геодезических квадратов со сторонами $a = 1 \text{ км}$ в случае неравноточных измерений можно воспользоваться формулой (9), где вместо коэффициента k надо подставить k'

$$1/P_u = 1,079^{k'/c} \cdot 1/P_p = 1,079^{2,5k/c} \cdot 1/P_p - 1,21^{k/c} \cdot 1/P_p. \quad (13)$$

Полученные соотношения (9) и (13) подтверждаются результатами экспериментальной проверки. Как видно из табл. 2, значения обратных весов соответствующих пунктов цепей три-

латерации со сторонами квадратов $a=0,4$ км и $a=1$ км, которые измеряются электронными дальномерами с коэффициентами уравнений регрессии соответственно $c=1,0$, $k=2,5$ и $c=1,0$, $k=1,0$, являются одинаковыми.

Нетрудно определить, что для произвольного масштаба сети (когда сторона квадратов равна a км) формула (13) примет вид:

$$1/P_u = 1,21^{\frac{a}{c}} \cdot 1/P_p. \quad (14)$$

Выполненная нами проверка формулы (14) показала, что ее погрешность для $0 < k/c \leq 5$ и $5 < k/c \leq 10$ находится соответственно в пределах 2 и 10%.

Проведенные нами исследования подтвердили также, что обратные веса дирекционных углов связующих сторон в исследуемой модели практически не зависят от измерительной аппаратуры. Поэтому при априорной оценке точности такого типа сетей для неравноточного случая можно воспользоваться формулой, соответствующей равноточному случаю [4].

С помощью формулы (14) легко определить погрешность, которая будет иметь место при пренебрежении неравноточностью измерений. Например, при создании геодезической сети первого вида со стороной квадратов два км с помощью электронного дальномера, имеющего уравнение регрессии

$$m_D = 1,0 + 2,0 \cdot D \cdot 10^{-6}, \quad (15)$$

мы допустим ошибку в определении значений обратных весов $1/P_t$ и $1/P_u$

$$\Delta = 1/P_u - 1/P_p = (1,21^{\frac{2}{1}} - 1) \cdot 1/P_p \simeq 1,14 \cdot 1/P_p, \quad (16)$$

или в процентах

$$\delta (\%) = \frac{\Delta}{1/P_u} \cdot 100 (\%) = \frac{1,14 \cdot 1/P_p}{2,14 \cdot 1/P_p} \cdot 100 \% \simeq 53 \%. \quad (17)$$

Список литературы: 1. Виленский В. А. Оценка точности цепи трилатерации из геодезических четырехугольников. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1978, вып. 28. 2. Виленский В. А. Изучение влияния дополнительных измерений на точность цепей трилатерации. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1980, вып. 31. 3. Кемниц Ю. В. Математическая обработка зависимых результатов измерений. — М.: Недра, 1970. 4. Кутузов Н. И. Накопление погрешностей в рядах триангуляции с измеренными сторонами. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1957, вып. 2.

Статья поступила в редакцию 21.04.80