

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

С широким внедрением в производство современных быстродействующих ЭВМ появилась возможность решать задачи проектирования оптимальной формы и оптимальной точности измеряемых величин довольно обширных геодезических сетей. Для этой цели можно применять методы нелинейного программирования.

Любая задача нелинейного программирования может быть сформулирована в следующем общем виде: требуется найти минимум целевой функции

$$\Phi(T) = \min \quad (1)$$

при наличии ограничений в виде равенств

$$g(T) = 0 \quad (2)$$

и (или) неравенств

$$f(T) \geq 0. \quad (3)$$

Здесь  $g$  и  $f$  — заданные вектор-функции

$$T = (t_1, t_2, \dots, t_m)^T$$

— вектор-параметров, которые находятся в результате решения задачи (1) — (3). При оптимизации геодезических сетей такими параметрами служат координаты определяемых пунктов и (или) веса измерений, на которые наложены ограничения

$$a_j \leq t_j \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

Ограничения (4) можно записать и в виде (3), но это не облегчит решения общей задачи нелинейного программирования.

Ограничения типа неравенств (4) можно снять, если воспользоваться заменой переменных [5]

$$\left. \begin{aligned} t_j &= a_j + (b_j - a_j) \sin^2 \psi_j, \\ T &\Rightarrow \Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m)^T. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Функция  $g$  в равенстве (2) может выражать, например, объем работ по измерениям в сети.

В качестве целевых функций обычно используют критерии точности сети: инварианты ковариационной матрицы необходимых неизвестных, средние квадратические ошибки различных элементов сети и др. Описание основных критериев можно найти, например, в работах [2—4, 6, 9].

Примем за целевую функцию число обусловленности ковариационной матрицы необходимых неизвестных сети. Оно рав-

по числу обусловленности матрицы нормальных уравнений  $N$  параметрического способа уравнивания. Тогда положим

$$\Phi = \frac{\lambda_1}{\lambda_n} = \min, \quad (6)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_n$  — максимальное и минимальное собственные значения матрицы нормальных уравнений. Условие (6) выражает требование максимальной однородности и изотропности геодезической сети [6].

Полагая измерения равноточными, рассмотрим определение оптимальной формы сети под условием (6). Учитывая возможность замены переменных по формуле (5), задача сводится к отысканию минимума целевой функции без ограничений на параметры. Для ее решения может быть применен любой из итерационных градиентных методов. Воспользуемся одним из наиболее простых и эффективных — методом Ньютона—Гринштадта [8], который на каждой  $i$ -й итерации описывается формулой

$$\Psi_{i+1} = \Psi_i - R_i \nabla \Phi_i,$$

где

$$\nabla \Phi_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \Psi_i}$$

— градиент целевой функции;

$$R_i = S_i \Gamma_i S_i^T = \sum_{j=1}^m \gamma_j s_j s_j^T$$

— положительно определенная матрица, в которой  $S_i$  — матрица, составленная из собственных векторов  $s_j$  матрицы Гессе

$$H_i = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \Psi_i^2},$$

и  $\Gamma_i$  — диагональная матрица с элементами

$$\gamma_j = \{\max(|\pi_j|, \delta)\}^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь  $\pi_j$  — собственные значения матрицы Гессе;  $\delta$  — малая положительная константа, гарантирующая положительную определенность матрицы  $R_i$ . В работе [1] ее рекомендуется вычислять по формуле

$$\delta = \max(2^{-p} \|H_i\|_1, 2^{-p}),$$

где  $\|H_i\|_1$  — первая, кубическая норма матрицы,  $p$  — разрядность мантииссы при представлении чисел на конкретной ЭВМ.

Опуская для простоты записи в индексных выражениях номер итерации, приведем формулы для вычисления элементов градиента и матрицы Гессе целевой функции (6):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \psi_k} = \lambda_n^{-1} \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial \psi_k} - \Phi \frac{\partial \lambda_n}{\partial \psi_k} \right);$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi_k \partial \psi_j} = \lambda_n^{-1} \left( \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \psi_k \partial \psi_j} - \Phi \frac{\partial^2 \lambda_n}{\partial \psi_k \partial \psi_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_k} \cdot \frac{\partial \lambda_n}{\partial \psi_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \lambda_n}{\partial \psi_k} \right).$$

Частные производные от собственных значений  $\lambda_i$  и соответствующих им собственных векторов  $z_i$  матрицы нормальных уравнений равны:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \psi_k} = z_i^T \frac{\partial N}{\partial \psi_k} z_i;$$

$$\frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial \psi_k \partial \psi_j} = 2 \frac{\partial z_i^T}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial N}{\partial \psi_k} z_i + z_i^T \frac{\partial^2 N}{\partial \psi_k \partial \psi_j} z_i.$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial \psi_j} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m c_{ijk} z_k; \quad c_{ijk} = \frac{z_k^T \frac{\partial N}{\partial \psi_j} z_i}{\lambda_i - \lambda_k}.$$

Эти формулы можно получить, воспользовавшись предложениями, приведенными в работе [7].

Частные производные от матрицы нормальных уравнений по новым переменным  $\psi$  имеют вид

$$\frac{\partial N}{\partial \psi_k} = \frac{\partial t_k}{\partial \psi_k} \cdot \frac{\partial N}{\partial t_k}; \quad \frac{\partial^2 N}{\partial \psi_k \partial \psi_j} = \frac{\partial t_j}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial t_k}{\partial \psi_k} \cdot \frac{\partial^2 N}{\partial t_k \partial t_j} + \frac{\partial^2 t_k}{\partial \psi_k \partial \psi_j} \cdot \frac{\partial N}{\partial t_k}.$$

Учитывая формулу (5), получаем

$$\frac{\partial t_k}{\partial \psi_k} = (b_k - a_k) \cdot \sin 2\psi_k;$$

$$\frac{\partial^2 t_k}{\partial \psi_k \partial \psi_j} = \begin{cases} 2(b_k - a_k) \cos 2\psi_k, & k = j; \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Определение производных от матрицы нормальных уравнений по параметрам  $t$  не вызывает затруднений. Некоторые формулы можно найти, например, в работе [4].

Рассмотрим применение изложенной методики на элементарном примере определения формы прямой засечки с трех исходных пунктов по равноточно измеренным дирекционным углам (рис. 1). Для простоты вычислений координаты исходных пунктов в примере такие:  $x_1 = x_3 = y_2 = 1$ ;  $x_2 = y_1 = 0$ ;  $y_3 = 2$ . Нетрудно видеть, что в этом случае обусловленность матрицы нормальных уравнений будет зависеть только от одной координаты определяемого пункта —  $x_4$ . Наложим на  $x_4$  условие в виде неравенств

$$1,0 \leq x_4 \leq 1,5.$$

Опуская промежуточные вычисления, ход оптимизации можно проследить по таблице. Как видим, итеративный процесс с точностью до шестого знака после запятой сошелся уже на четвертой итерации, т. е. скорость сходимости очень высока. На практике, естественно, такой высокой точности добиваться не следует и вполне достаточно ограничиться одной верной цифрой после запятой. Так как решение самоисправляющееся, не сле-

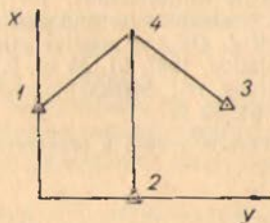


Рис. 1. Схема сети.

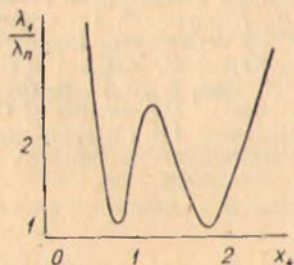


Рис. 2. Зависимость числа обусловленности от координаты  $x_4$ .

дует бояться ошибок округлений и даже грубых ошибок. В качестве начального приближения в принципе можно взять любую точку в пределах ограничений. В нашем случае взято  $x_4 = 1,25$ .

#### Основные результаты вычислений на каждой итерации

$x_4$	$\phi_4$	$\Phi$	$\nabla\Phi$	$H$
1,250 000	0,785 398	2,359 882	-0,729 545	-4,866 257
1,323 841	0,935 317	2,206 782	-1,232 581	-1,704 632
1,496 173	1,658 394	1,686 161	+0,267 878	+3,046 864
1,500 000	1,570 475	1,674 419	-0,000 980	+3,062 824
1,500 000	1,570 795	1,674 419		

Следует подчеркнуть, что в результате решения отыскивается локальный минимум целевой функции. Полученный в рассматриваемом примере минимум будет и глобальным. К сожалению, до настоящего времени нет универсальных методов, гарантирующих определение глобального минимума. Целевые же функции, используемые в геодезии, могут иметь несколько экстремальных точек. В качестве примера на рис. 2 приведен график обусловленности матрицы нормальных уравнений для сети, изображенной на рис. 1, в зависимости от координаты определяемой точки  $x_4$  в пределах от 0,5 до 2,5.

Есть основания думать, что достигнут глобальный минимум, все вычисления можно многократно повторить, начиная расчеты с разных начальных приближений. Сравнение полученных результатов даст возможность выявить глобальный минимум.

Список литературы: 1. Гилл Ф., Мюррей У. Ньютоновские методы решения задач оптимизации при линейных ограничениях. — В кн.: Численные методы условной оптимизации. М.: Мир, 1977. 2. Конусов В. Г. О критериях точности плановых опорных геодезических сетей. — Тр. НИИГАиК, 1969, вып. 23. 3. Прохоров К. Л. Расчет точности измеренных величин в геодезической сети. — Геодезия и картография, 1974, № 6. 4. Тамутис З. П. Оптимальные методы проектирования геодезических сетей. — М.: Недра, 1979. 5. Box M. J. A comparison of several current optimization methods and the use of transformations in constrained problems. — The Computer Journal, 1966, 9, N 1. 6. Dupraz H., Niemeier W. Un critère pour l'analyse des réseaux géodésique de controle. — *Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik*, 1977, 77, № 4. 7. Fox R. L., Kapoor M. P. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. — AIAA Journal, 1968, 6, № 12. 8. Greenstadt J. On the relative efficiencies of gradient methods. — *Mathematics of Computation*, 1967, 21, № 99. 9. Schmitt G. Gewichtsoptimierung bei Mehrpunkteinschaltung mit Streckenmessung. — *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten*, 1978, 85, № 1.

Статья поступила в редколлегию 17.06.80