УДК 528.14

С. Д. ВОЛЖАНИН

УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ МЕТОДОМ L_p-ОЦЕНОК

Метод L_p-оценок включает в себя методы наименьших квадратов (МНК), наименьших модулей, равномерных приближений. Уравнивание этим методом сводится к решению систем параметрических или условных уравнений при условии минимума суммы произведений модулей остаточных уклонений в p-й степени

$$\sum_i q_i |v_i|^p \to \min, \quad p \geqslant 1, \tag{1}$$

где q_i — вес результатов измерений.

Вероятностное обоснование использования метода L_p-оценок вытекает из метода максимального правдоподобия Фишера (ММП), в случае его применения к семейству распределений

$$Y(\xi) = \frac{c_p}{2\Delta_p} \exp\left(-\frac{1}{p\Delta_p^p} |\xi - \xi_0|^p\right), \tag{2}$$

где c_p, Δ_p — параметры, зависящие от p. Несложно показать, что поиск наилучших оценок ММП при ошибках, имеющих плотность (2), приводит к условию метода L_p-оценок (1). Методика поиска оптимального значения p при уравнивании геодезических построений включает: проведение предварительного статистического анализа ошибок измерений или величин, косвенным образом связанных с ними (например, невязок треугольников триангуляции и т. п.); установление эмпирического закона распределения ошибок и согласование параметров теоретического закона (2) с эмпирическим; определение p при условии минимума критерия согласия теоретического и эмпирического распределений. Наиболее подходящим для этого представляется критерий χ^2 Пирсона.

Вычислительная сторона метода L_p-оценок в настоящее время достаточно хорошо изучена. Основой его является итеративный метод наименьших квадратов (ИМНК).

Остановимся на основных моментах применения ИМНК для отыскания L_p-оценок при уравнивании геодезических измерений.

Условие (1), преобразованное следующим образом

$$\sum_i q_i |v_i|^{p-2} v_i^2 \to \min,$$

очевидно, можно рассматривать как условие МНК с неизвестной весовой матрицей

$$C = Q|V|^{p-2},$$

уточняемой в процессе применения ИМНК. Рекуррентный алгоритм уравнивания методом L_p-оценок приводится ниже отдельно для параметрического и условного способа.

Вопросы оценки точности получаемых результатов в данной работе не рассматриваются.

Параметрический способ. Если задана система параметрических уравнений $AX+B=V$ с весовой матрицей Q, то уравнивание рассматриваемым методом сводится к следующим этапам:

I. **При** $1 \leqslant p < 2$.

1. Нахождение приближенного решения (например, по МНК)

$$\hat{X} = -(A^{\mathrm{T}} QA)^{-1} A^{\mathrm{T}} QB;$$

$$V = A\hat{X} + B.$$

2. Вычисление элементов весовой матрицы

$$c_{ij} = \begin{cases} q_i |v_i|^{p-2}, & i=j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{3}$$

3. Нахождение неизвестных X и V

$$X = -(A^{\mathrm{T}} CA)^{-1} A^{\mathrm{T}} CB;$$

$$V = AX + B. \tag{4}$$

4. По остаточным уклонениям V с использованием (3) вычисляется новое значение матрицы C, а затем новое решение по (4). Итерационный процесс повторяется до тех пор, пока не выполнится условие

$$\frac{\| x_n - x_{n+1} \|}{\| x_n \|} < \varepsilon,$$

где ε — заданная точность решения. Сходимость такого процесса доказана в [2].

II. $p > 2$.

Этапы 1, 2 и 3 остаются теми же, что и при $1 \leqslant p < 2$. Полученное на третьем этапе значение $\hat{x}_n$ корректируется по формуле

$$x_n = (1-G)\, x_{n-1} + \hat{x}_n,$$

где

$$G = \frac{1}{p-1}.$$

Затем процесс повторяется, начиная со второго этапа. При этом используются остаточные уклонения, соответствующие новым значениям x_n. При достижении заданной точности решения процесс итераций прекращается. Данная модификация ИМНК введена Флетчером, Грантом и Хебденом [3].

Коррелатный способ. Пусть задана система условных уравнений $BV + W = 0$ с весовой матрицей Q. Решение методом L_p-оценок в этом случае включает:

I. При $1 \leqslant p < 2$.

1. Нахождение приближенного МНК-решения

$$V = Q^{-1}B^T K;$$
$$K = (BQ^{-1}B^T)^{-1}W.$$

2. Вычисление элементов весовой матрицы по (3).
3. Нахождение коррелат K и поправок V

$$K = (BC^{-1}B^T)^{-1}W;$$
$$V = C^{-1}B^T K. \tag{5}$$

4. Проверка условия

$$\frac{\| k_{n+1} - k_n \|}{\| k_n \|} < \varepsilon. \tag{6}$$

При невыполнении (6) этапы 2 и 3 повторяются с использованием последних полученных значений K и V.

II. При $p > 2$.

Пункты 1, 2 и 3 аналогичны описанным выше.

4. Для обеспечения сходимости процесса итераций выполняется корректировка полученных коррелат

$$K = (1 - G)K + G\hat{K},$$

после чего вычисляется матрица

$$R = CV = A^T K.$$

Элементы новой весовой матрицы C запишем так:

$$c_{ij} = \begin{cases} |r_i|^{\frac{p-2}{p-1}}, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{7}$$

Рекуррентный процесс повторяется до достижения заданной точности коррелат.

5. Окончательные значения вероятнейших поправок в измеренные величины вычисляются по (5).

Данный процесс эквивалентен методу Ньютона поиска условного минимума функции. Сходимость ИМНК в этом случае гарантируется теоремой 3 из [3].

В таблице приведены результаты уравнивания геодезического четырехугольника [1] методом L_p-оценок. Для проверки описанного алгоритма решение выполнялось при различных значениях p коррелатным и параметрическим способом по методу L_p-оценок с точностью $\varepsilon = 0{,}001$. Правильность приведенных выше формул подтвердилась получением тождественных результатов (в пределах заданной точности) при уравнивании сети обеими способами метода L_p-оценок *.

* Следует заметить, что предварительный статистический анализ в данном примере не проводился из-за отсутствия у автора необходимых данных.

Результаты уравнивания геодезического четырехугольника методом L_p-оценок

№ угла	Параметрический метод с уклонениями V при p			Коррелатный метод с поправками V при p		
	1	2	3	1	2	3
	Число итераций			Число итераций		
	2	1	4	3	1	30
1	−0,011	+0,093	+0,204	−0,011	+0,093	+0,204
2	+0,007	+0,083	−0,156	+0,007	−0,083	−0,156
3	+0,628	+0,723	+0,764	+0,628	+0,723	+0,764
4	+0,038	+0,107	+0,213	+0,038	+0,107	+0,213
5	+0,927	+0,852	+0,780	+0,927	+0,853	+0,780
6	−1,273	−1,083	−0,959	−1,273	−1,083	−0,959
7	−0,392	−0,576	−0,733	−0,392	−0,576	−0,733
8	−0,524	−0,634	−0,712	−0,524	−0,634	−0,712

Таким образом, использование адаптивного метода уравнивания (метода L_p-оценок) для целей геодезии позволяет видоизменять в зависимости от статистических свойств ошибок измерений требование, предъявляемое к условию, при котором выполняется уравнивание. Получаемые при этом оценки будут несмещенными, состоятельными и эффективными, а сам алгоритм, включающий статистический анализ, согласование теоретического и эмпирического распределений ошибок и вычисление оценок, достаточно просто реализуемым на ЭВМ.

Список литературы: 1. *Монин И. И.* Единый алгоритм составления условных уравнений в геодезических сетях. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1980, вып. 35. 2. *Мудров В. И., Кушко В. Л.* Методы обработки измерений. — М. : Сов. радио, 1976. 3. *Fletcher R., Grant J. A., Hebden M. D.* The calculation of linear best L_p-approximations. — Computer Journal, 1971, v. 14, № 3.

Статья поступила в редколлегию 26. 05. 83