

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ОКТАПОЛЯ ЗЕМЛИ

1. В последнее время расширяется использование мультипольного представления потенциала и сферических функций по Максвеллу в геодезии, в частности в теории фигуры Земли. Это обусловлено тем, что, выражая гравитационный потенциал в виде ряда потенциалов мультиполей различных порядков $\sum_{n=0}^{\infty} V_n$, можно дать удобное физическое истолкование каждому члену такого разложения, позволяющее придти к некоторым обобщенным представлениям о структуре тела, создающего изучаемый потенциал. Так, например, М. Hotin, говоря о значении мультиполей, подчеркивает важность их «теоретического использования как указания природы гармоник» ([5] стр. 179).

Однако для получения соответствующих результатов в данном направлении надо уметь переходить от сферических функций $Y_n(\vartheta, \lambda)$ как коэффициентов в разложении потенциала в ряд шаровых функций

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} Y_n(\vartheta, \lambda), \quad (1)$$

где

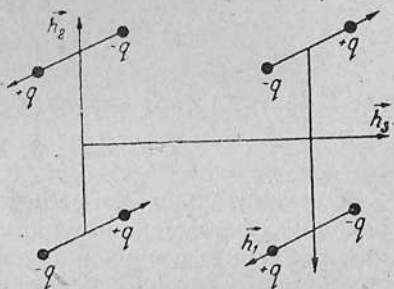
$$Y_n(\vartheta, \lambda) = fMa^n \left[C_{n0} P_n(\cos \vartheta) + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\cos \vartheta) \right], \quad (2)$$

к потенциалам мультиполей различных порядков

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n; V_n = (-1)^n M_n \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \left(\frac{1}{r} \right); M_n = n! q \prod_{i=1}^n h_i. \quad (3)$$

В выражениях (1), (2) и (3) r — расстояние от центра Земли до внешней точки; ϑ — ее полярное расстояние; λ — долгота; a — экваториальный радиус; fM , C_{nm} , S_{nm} — стоксовы постоянные планеты; $P_n(\cos \vartheta)$ — полиномы Лежандра; $P_n^m(\cos \vartheta)$ — присоединение функции Лежандра; V_n — потенциал мультиполя n -го порядка;

M_n — момент мультиполя; $\vec{h}_i$ — оси мультиполя; $\frac{\partial}{\partial h_i}$ — дифференцирование по оси $\vec{h}_i$; q — точечный гравитационный заряд [3], при этом $q > 0$ означает избыток масс в данной точке тела относительно некоторого принятого его строения, а $q < 0$ — недостаток.



Для перехода от потенциала (1) к форме (2) надо знать моменты M_n и оси $\vec{h}_i$ мультиполей. Однако, исходя из (1), считают [3], что всякая сферическая функция порядка n «порождается» мультиполем того же порядка. На основании этого, вопрос о нахождении положений осей (полюсов) мультиполя n -го порядка сводится к вопросу об отыскании осей (полюсов) сферической функции n -го порядка, которая в теории Максвелла определяется формулой

$$Y_n = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} M_n \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (4)$$

В итоге выполненных исследований мы пришли к выводу, что наиболее выгодным при нахождении полюсов и моментов сферической функции является, по-видимому, использование методики проф. Г. А. Мещерякова [4], как наиболее простой при работе с ЭЦВМ.

В [3] описаны мультиполя Земли низших порядков — нулевого, первого (диполь), второго (квадруполь). Здесь же мы остановимся на вычислении элементов октаполя Земли (мультиполя третьего порядка).

2. Дадим сначала физическое описание октаполя. Мультиполем n -го порядка, потенциал которого дается формулой (3), называется точечный объект, получаемый в результате безграничного сближения двух мультиполей $(n-1)$ -го порядка. Рассматривая октаполь, скажем, что он получается за счет сближения двух квадриполей (мультиполей второго порядка).

Таким образом, октаполь характеризуется моментом M_3 и направлениями осей $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3$. Потенциал октаполя V_3 равен

$$V_3 = -\frac{M_3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial h_1 \partial h_2 \partial h_3} \left(\frac{1}{r} \right),$$

а приближенная его структура представлена на рисунке.

3. Как известно, см. напр. [1, 4], отыскание системы осей полюсов октаполя требует решения алгебраического уравнения степени $2n$, эквивалентного системе

$$\left. \begin{aligned} Z_3(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

где $Z_3(\xi, \eta, \zeta)$ соответствует шаровой функции третьего порядка

$$Z_3(r, \vartheta, \lambda) = r^3 Y_3(\vartheta, \lambda). \quad (6)$$

Следовательно, до решения системы (5) нужно сделать переход от сферической функции Y_3 к шаровой Z_3 . Однако объединим последнее с решением системы (5). Записав Z_3 в развернутом виде

$$\begin{aligned} Z_3(r, \vartheta, \lambda) = r^3 & \left[C_{30} \frac{1}{8} (5 \cos 3\vartheta + 3 \cos \vartheta) + \right. \\ & + C_{31} \frac{3}{8} (\sin \vartheta + 5 \sin 3\vartheta) \cos \lambda + S_{31} \frac{3}{8} (\sin \vartheta + 5 \sin 3\vartheta) \sin \lambda + \\ & + C_{32} \frac{15}{4} (\cos \vartheta - \cos 3\vartheta) \cos 2\lambda + S_{32} \frac{15}{4} (\cos \vartheta - \cos 3\vartheta) \sin 2\lambda + \\ & + C_{33} \frac{15}{4} (3 \sin \vartheta - \sin 3\vartheta) \cos 3\lambda + \\ & \left. + S_{33} \frac{15}{4} (3 \sin \vartheta - \sin 3\vartheta) \sin 3\lambda \right] fM \cdot a^3, \quad (7) \end{aligned}$$

сделав переход по известным формулам от сферических координат r, ϑ, λ к прямоугольным x, y, z , заменив последние на ξ, η, ζ и учтя (5), получаем

$$\begin{aligned} 5C_{30}\zeta^3 + 15C_{31}\xi\zeta^2 + 15S_{31}\eta\zeta^2 + 30C_{32}\zeta(\xi^2 - \eta^2) + 60S_{32}\xi\eta\zeta + \\ + 120C_{33}\xi^3 + 90C_{33}\xi\zeta^2 - 90S_{33}\eta\zeta^2 - 120S_{33}\eta^3 = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Для приведения выражения (8) к алгебраическому уравнению R_{2n} степени $2n=6$ воспользуемся заменой [2]:

$$\xi = \frac{1-u^2}{1+u^2}v; \quad \eta = \frac{2u}{1+u^2}v; \quad \zeta = iv; \quad i = \sqrt{-1}, \quad (9)$$

которая преобразует (8) в алгебраическое уравнение шестой степени вида

$$a_0 u^6 + a_1 u^5 + a_2 u^4 + a_3 u^3 + a_4 u^2 + a_5 u + a_6 = 0. \quad (10)$$

Его коэффициенты суть комплексные числа:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= M_0 + iN_0 & a_3 &= M_3 + iN_3 & a_6 &= M_6 + iN_6 \\ a_1 &= M_1 + iN_1 & a_4 &= M_4 + iN_4 \\ a_2 &= M_2 + iN_2 & a_5 &= M_5 + iN_5 \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} -M_6 &= M_0 = 3C_{31} - 6C_{33} & N_6 &= N_0 = 6C_{32} - C_{30} \\ M_5 &= M_1 = 36S_{33} - 6S_{31} & -N_5 &= N_1 = -24S_{32} \\ -M_4 &= M_2 = 3C_{31} + 90C_{33} & N_4 &= N_2 = -(3C_{30} + 30C_{32}) \\ M_3 &= -(12S_{31} + 120S_{33}) & N_3 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Формулы (11) и (12) являются исходными для определения коэффициентов уравнения (10) шестой степени. Для их получения было использовано выражение сферической функции третьего порядка общего вида. Поэтому коэффициенты сферической функции C_{nm} , S_{nm} , фигурирующие в этих выражениях, могут иметь любые значения. В последующем под ними понимаются гармоники гравитационного поля Земли, взятые по «Стандартной Земле I» (1966 г.):

$$\left. \begin{aligned} C_{30} &= 2,565 \cdot 10^{-6} \\ C_{31} &= 1,847 \cdot 10^{-6} & S_{31} &= 0,248 \cdot 10^{-6} \\ C_{32} &= 0,286 \cdot 10^{-6} & S_{32} &= -0,174 \cdot 10^{-6} \\ C_{33} &= 0,092 \cdot 10^{-6} & S_{33} &= 0,199 \cdot 10^{-6} \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Все вычисления велись на электронно-вычислительной машине М-222. Для нахождения корней уравнения шестой степени использовалась стандартная программа «Вычисление корней полинома методом Мюллера». После счета получено шесть комплексных корней (неравных и несопряженных).

Затем, при рассмотрении линейных форм $A\xi + B\eta + C\zeta = 0$ в соответствии с [4], определялись величины A , B , C , пропорциональные направляющим косинусам осей сферической функции. После вычислений установлено, что для октаполя Земли указанные формы следуют из детерминанта

$$A\xi + B\eta + C\zeta = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha'_1 + i\beta'_1 & \alpha'_2 + i\beta'_2 & i \\ -\alpha'_1 + i\beta'_1 & -\alpha'_2 + i\beta'_2 & i \end{vmatrix} = 0, \quad (14)$$

где

$$\alpha_1 + i\beta_1 = \frac{1 - u^{*2}}{1 + u^{*2}}; \quad \alpha_2 + i\beta_2 = \frac{2u^*}{1 + u^{*2}}, \quad (15)$$

а u^* — вычисленные значения одного из корней уравнения степени $2n$. В (14) α и β с одним штрихом соответствуют одной образующей, а с двумя — другой, которые определяют линейную форму. Пары мнимых образующих, получаемых путем перебора решения (15), соответствуют как раз случаю (б), указанному в [4], так как после умножения величин $\alpha + i\beta$, для одной из них, на минус единицу, эти пары становятся комплексно-сопряженными.

Найдя A, B, C и нормируя $A\xi + B\eta + C\zeta$, можно затем получить направляющие косинусы осей октаполя, а значит и сферические координаты (ϑ, λ) его полюсов

$$A^2 + B^2 + C^2 = \mu^2 \neq 1; \quad (16)$$

$$a = \frac{A}{\mu}; \quad b = \frac{B}{\mu}; \quad c = \frac{C}{\mu}, \quad (17)$$

где a, b, c — направляющие косинусы осей октаполя и

$$\left. \begin{aligned} a &= \cos \alpha \\ b &= \cos \beta \\ c &= \cos \gamma = \cos \vartheta \end{aligned} \right\}; \quad (18)$$

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{b}{a}, \quad (19)$$

(α, β, γ — углы, образуемые осью функции с координатными осями; ϑ — полярное расстояние полюса сферической функции, λ — долгота).

В результате вычислений получены следующие шесть пар значений координат полюсов ϑ, λ октаполя Земли и диаметрально противоположных точек, из которых следует выбрать три, чтобы устранить неоднозначность решаемой задачи (сферическая функция третьего порядка имеет три полюса):

№	ϑ	λ
1	121°22',2	108°25',3
2	36°28',2	115°25',8
3	71°53',6	21°14',1
4	143°31',8	295°25',8
5	58°37',8	288°25',3
6	108°06',4	201°14',1

4. Вычислим момент октаполя. По основной формуле Максвелла сферическая функция третьего порядка представляется в виде произведения двух сомножителей [3, 6]

$$Y_3 = M_3 \left[\frac{5}{2} \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 - \frac{1}{2} (\mu_1 \lambda_{23} + \mu_2 \lambda_{31} + \mu_3 \lambda_{12}) \right], \quad (20)$$

или

$$Y_3 = M_3 \cdot N_3, \quad (21)$$

где в общем случае

$$\left. \begin{aligned} \mu_i &= \cos \vartheta \cdot \cos \vartheta_i + \sin \vartheta \cdot \sin \vartheta_i \cos (\lambda - \lambda_i) \\ \lambda_{ij} &= \cos \vartheta_i \cdot \cos \vartheta_j + \sin \vartheta_i \cdot \sin \vartheta_j \cos (\lambda_i - \lambda_j) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(ϑ и λ означают координаты текущей точки; ϑ и λ с индексами означают координаты полюсов сферической функции).

Для определения момента $M_3 = \frac{Y_3}{N_3}$ вычислим N_3 (уже зная координаты функций) при каких-то конкретных значениях (удобнее всего брать текущую точку на северном полюсе при $\vartheta=0^\circ$); и при тех же значениях ϑ и λ вычислим Y_3 с помощью формулы (2). Сравнивая (2) и (21), получаем следующее выражение для определения момента октаполя

$$M_3 = \frac{fM \cdot a^3 \cdot C_{30}}{N_3} \quad (23)$$

Подставляя численные значения в (23), находим момент октаполя

$$M^3 = 0,11281 \cdot 10^{31} \text{ м}^6 \cdot \text{сек}^{-2}.$$

Согласно теории момент сферической функции должен быть положителен [1, 2], поэтому при вычислении по формуле (23) следует брать в формулах (22) такие значения координат полюсов функции Y_3 , при которых N_3 имеет тот же знак, что и C_{30} . Это дает возможность отбросить первые три пары полученных координат как неудовлетворяющие этому условию. Значит координаты полюсов сферической функции третьего порядка и октаполя Земли имеют следующие значения:

№	ϑ	λ
1	58°37',8	288°25',3
2	143°31',8	295°25',8
3	108°06',4	201°14',1

Отметим, что координаты полюсов октаполя и его момент вычислялись на основании стоксовых постоянных Земли третьего порядка, поэтому они являются характеристиками гравитационного потенциала Земли V_3 .

5. Обычно поверхностную сферическую функцию $Y_n(\vartheta, \lambda)$ принято представлять в виде суммы зональных, тессеральных и секториальных гармоник. А в спутниковой геодезии при определении параметров гравитационного поля Земли C_{nm} и S_{nm} отдельно вычисляют зональные коэффициенты C_{n0} , соответствующие Земле, имеющей осевую симметрию, и отдельно незональные (тессеральные и секториальные) гармоники, обусловленные отличием планеты от тела вращения. В связи с этим целесообразно рассмотрение октаполей Земли, соответствующих отдельно каждому из этих случаев.

Как известно, для любой зональной гармонике ее n осей совпадают с осью z , совмещенной с осью вращения Земли. Поэтому для зональной гармонике третьего порядка можно сказать, что ее три полюса (с учетом того, что момент $M_3^{(зон)}$ должен быть положительным) имеют следующие координаты:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0^\circ; \vartheta_3 = 180^\circ,$$

а ее момент равен

$$M_3^{(зон)} = 0,26528 \cdot 10^{30},$$

причем

$$M_3 \approx 4M_3^{(зон)}. \quad (24)$$

Для октаполя Земли, соответствующего незональной части $Y_3(\vartheta, \lambda)$, были получены следующие параметры:

№	ϑ	λ
1	59°49',7	298°58',2
2	142°58',7	290°32',0
3	95°45',4	195°43',3

$$M_3^{(незон)} = 0,10492 \cdot 10^{31} \text{ м}^6 \text{ сек}^{-2},$$

которые очень близки к значениям общего октаполя, а

$$M_3^{(незон)} \approx M_3. \quad (25)$$

Из рассмотрения набора нормированных стоксовых постоянных Земли следует, что все они примерно одного и того же порядка и выделить преобладающее влияние каких-либо из них в отдельности или даже группы затруднительно. Сравнение же найденных октаполей Земли, соответствующих зональной и незональной частям Y_3 , говорит о том, что октаполь Земли обусловлен главным образом тессеральными и секториальными параметрами гравитационного поля, поэтому и потенциал Земли третьего порядка V_3 обусловлен в большой мере незональной частью сферической функции Y_3 .

В свое время большой неожиданностью было получение относительно большого значения параметра C_{30} , вызывающего в геометрической фигуре геоида асимметрию по отношению к экватору. Преобладание незональной части Y_3 над зональной свидетельствует о значительной асимметрии Земли также и в долготном отношении.

6. В заключение отметим, что рассматриваемая в работе методика была применена также для нахождения координат полюсов квадруполь Земли и его момента M_2 . В результате этих вычислений получены следующие параметры мультиполя Земли второго порядка:

№	ϑ	λ
1	4°37',5	163°13',3
2	175°22',5	163°13',3

$$M_2 = 17,5 \cdot 10^{24} \text{ м}^5 \text{ сек}^{-2}.$$

Эти характеристики полностью совпадают со значениями координат полюсов и моментом M_2 квадруполья, вычисленными в [3] по методу Н. А. Умова. Однако из сравнения вычислений, выполненных в [3], и здесь можно прийти к выводу о большой целесообразности использования применяемой методики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций Л., «Иностранная литература», 1952.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.—Л., Изд-во технико-теоретической литературы, 1951.
3. Мещеряков Г. А. О мультипольном представлении гравитационного потенциала. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, вып. 19.
4. Мещеряков Г. А. О нахождении полюсов сферических полюсов функций. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», настоящий выпуск.
5. Hotin M. Mathematical Geodesy. Waslington, 1969.
6. Maxwell G. I. A treatise on Electricity and Magnetism., vol. I, 2-nd edition. Oxford, 1881.

Работа поступила в редколлегию 23 января 1975 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.