

Я. М. КОСТЕЦКАЯ, Ю. В. ГЕРАСИМОВ

О ТОЧНОСТИ СЕТЕЙ ТРИЛАТЕРАЦИИ С ИСХОДНЫМИ ДИРЕКЦИОННЫМИ УГЛАМИ

Исходные дирекционные углы двух сторон, расположенных на краях сети трилатерации, значительно повышают точность положения ее пунктов [1, 2]. Исследования показали, что увеличение количества этих углов, т. е. увеличение густоты сторон с исходными дирекционными углами в ряде треугольников, приводит к сближению значений поперечных сдвигов пунктов с продольными [3]. Там же доказано, что точность положения пунктов в таком ряде обусловлена не только количеством сторон ряда с такими углами, но и их размещением.

Ниже приведены результаты исследования влияния исходных дирекционных углов связующих и промежуточных сторон

на точность сетей трилатерации, состоящих из двух и трех рядов треугольников. Исследования выполнены на макетах сетей трилатерации из равносторонних треугольников. Макет сдвоенного ряда представлен десятью взаимно перекрывающимися центральными системами (рис. 1). Макет строенного ряда выбран таким, чтобы в каждом его сдвоенном ряду было десять взаимно перекрывающихся центральных систем (рис. 2). На каждом макете рассматривали 16 вариантов, отличающихся

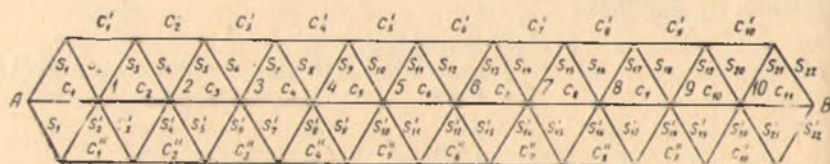


Рис. 1. Схема сдвоенного ряда.

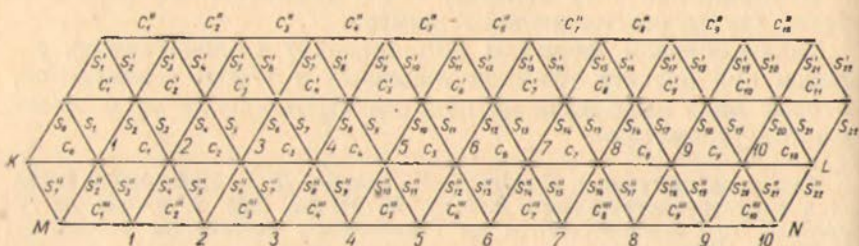


Рис. 2. Схема строеного ряда.

между собой количеством или размещением исходных дирекционных углов. Для каждого варианта сдвоенного ряда оценивали сдвиги всех пунктов диагонали AB относительно пункта A . В строенном ряду определяли сдвиги пунктов диагоналей KL и MN относительно пункта K . Исследования точности первых шести вариантов двух макетов сети выполнены для того, чтобы выяснить влияние густоты исходных дирекционных углов связующих и промежуточных сторон, равномерно расположенных в сети. Варианты с исходными дирекционными углами связующих сторон сдвоенного ряда обозначены буквой A , а строеного — B , варианты с исходными дирекционными углами промежуточных сторон сдвоенного ряда обозначены буквой B , а строеного ряда — Γ . Цифра в вариантах условно характеризует густоту исходных дирекционных углов. В каждом из шести вариантов сдвоенного ряда предполагали, что следующие стороны имеют исходные дирекционные углы (рис. 1):

в варианте $A1$ — s_1, s_{22}' ;	в варианте $B1$ — c_1, c_{11} ;
„ „ $A2$ — s_1, s_{12}, s_{22}' ;	„ „ $B2$ — c_1, c_6', c_{11} ;
„ „ $A3$ — $s_1, s_8', s_{15}, s_{22}$;	„ „ $B3$ — c_1, c_4', c_7', c_{11} .

В шести вариантах строенного ряда считали, что такие стороны имеют исходные дирекционные углы (рис. 2):

и варианте	$B1-s_0, s_{22};$	в варианте	$\Gamma 1-c_0, c_{10};$
„ „	$B2-s_0, s_{11}, s_{22};$	„ „	$\Gamma 2-c_0, c_6', c_{10};$
„ „	$B3-s_0, s_7, s_{15}, s_{22};$	„ „	$\Gamma 3-c_0, c_4', c_8', c_{10}.$

Как видим, однобуквенные варианты отличаются между собой густотой одиночных связующих или промежуточных сторон с исходными дирекционными углами.

Для оценки точности составляли условные уравнения центральных систем и дирекционных углов, а также весовые функции продольного и поперечного сдвигов оцениваемых пунктов. Число условных уравнений центральных систем равно в первом макете 10, а во втором — 20. Число условных уравнений дирекционных углов равно числу дирекционных углов без одного. Вид условных уравнений и весовых функций приведен в работе [4]. Следует отметить, что при составлении весовых функций поперечного сдвига пунктов диагоналей AB в вариантах B и KL и вариантах Γ учитывали наличие исходного дирекционного угла стороны c_0 . Это устраняет поперечный сдвиг пункта I относительно исходного пункта.

После составления условных уравнений и весовых функций для каждого варианта делали таблицу нормальных уравнений. Решая их, получали обратные веса сдвигов, а по ним, приняв, что средняя квадратическая ошибка единицы веса равна 1 см, получали средние квадратические сдвиги. Решение нормальных уравнений и вычисление обратных весов выполнены на ЭВМ М-222. Для контроля все условные уравнения и весовые функции составляли в две руки. Кроме этого, для контроля в каждом варианте составляли условные уравнения дирекционных углов по двум ходовым линиям и таким образом обратные веса получали дважды.

Дальнейшие исследования выполнены для изучения влияния дополнительных исходных дирекционных углов сторон, находящихся по краям сети, при разной густоте дирекционных углов в середине сети. Для этого исследовали точность шести вариантов сдвоенного ряда, в которых считали, что исходные дирекционные углы имеют следующие стороны:

в варианте	$A1k-s_1, s_{22}', s_1', s_{22};$
„ „	$A2k-s_1, s_{12}, s_{22}', s_1', s_{22};$
„ „	$A3k-s_1, s_8', s_{15}, s_{22}', s_1', s_{22};$
в варианте	$B1k-c_1, c_{11}, c_1'', c_{10}';$
„ „	$B2k-c_1, c_6', c_{11}, c_1'', c_{10}';$
„ „	$B3k-c_1, c_4', c_7', c_{11}, c_1'', c_{10}';$

Аналогично для шести вариантов строенного ряда:

в варианте	$B1k—s_0, s_{22}, s_1'', s_{22}'$;
„ „	$B2k—s_0, s_{11}, s_{22}, s_1'', s_{22}'$;
„ „	$B3k—s_0, s_7, s_{15}, s_{22}, s_1'', s_{22}'$;
в варианте	$\Gamma 1k—c_0, c_{10}, c_1', c_{11}'$;
„ „	$\Gamma 2k—c_0, c_6', c_{10}, c_1', c_{11}'$;
„ „	$\Gamma 3k—c_0, c_4', c_8', c_{10}, c_1', c_{11}$.

Кроме этого, исследовали влияние групп из двух-трех исходных дирекционных углов, равномерно расположенных в сетях. Для этого была выполнена оценка точности положения пунктов в четырех вариантах сдвоенного и четырех вариантах строенного рядов трилатерации. Для сдвоенного ряда приняли, что следующие стороны имеют исходные дирекционные углы:

в варианте	$A2z—s_1, s_1', s_{12}, s_{12}', s_{22}, s_{22}'$;
„ „	$A3z—s_1, s_1', s_8, s_8', s_{14}, s_{14}', s_{22}, s_{22}'$;
„ „	$B2z—c_1, c_1'', c_6', c_6'', c_{11}, c_{10}$;
„ „	$B3z—c_1, c_1'', c_4', c_4'', c_7', c_7'', c_{11}, c_{10}'$.

А в вариантах строенного ряда принято, что такие стороны имеют исходные дирекционные углы:

в варианте	$B2z—s_0, s_1'', s_{11}', s_{11}'', s_{22}, s_{22}'$;
„ „	$B3z—s_0, s_1, s_7, s_7', s_{11}'', s_{15}, s_{15}', s_{22}, s_{22}'$;
„ „	$\Gamma 2z—c_0, c_1', c_5'', c_6', c_5''', c_{10}, c_{11}'$;
„ „	$\Gamma 3z—c_0, c_1', c_4', c_3'', c_3, c_8', c_8''', c_8, c_{10}, c_{11}'$.

Полученные величины средних квадратических сдвигов части оцениваемых пунктов во всех вариантах сдвоенного ряда приведены в табл. 1, а строенного ряда — в табл. 2. В таблицах даны в основном поперечные сдвиги. Только для пунктов свободных сетей и вариантов с наибольшим числом исходных дирекционных углов (варианты $A3z$, $B3z$, $V3z$, $\Gamma 3z$) приведены поперечные (в числителях) и продольные (в знаменателях) сдвиги. Кроме этого, даны в процентах изменения сдвигов в сетях с исходными дирекционными углами по сравнению со свободной сетью такого же построения.

Анализ приведенных в таблицах данных позволяет сделать следующие выводы:

1. Исходные дирекционные углы связующих и промежуточных сторон по разному действуют на точность сдвоенных и строенных рядов трилатерации, но всегда наличие исходных дирекционных углов замедляет рост поперечного сдвига пунктов с увеличением числа сторон, отделяющих его от исходного пункта. На это указывает то, что изменение поперечного сдвига

пунктов практически во всех вариантах увеличивается с удалением от исходного пункта. Исключением является только изменение сдвига второго пункта в вариантах *Б* и *Г*, т. е. при исходных дирекционных углах промежуточных сторон.

Таблица 1

Средние квадратические сдвиги некоторых пунктов сдвоенного ряда

Варианты	Пункты									
	2		4		6		8		11	
	сдвиги	изменения, %	сдвиги	изменения, %	сдвиги	изменения, %	сдвиги	изменения, %	сдвиги	изменения, %
Свободная сеть	2,6	—	5,6	—	9,2	—	13,3	—	20,2	—
	1,2	—	1,5	—	1,7	—	1,9	—	2,5	—
Исходные дирекционные углы связующих сторон										
<i>A1</i>	2,3	12	4,8	14	7,3	21	9,5	29	12,7	37
<i>A2</i>	2,0	23	3,6	36	5,5	40	7,6	43	8,1	60
<i>A3</i>	1,9	27	3,1	45	4,1	55	5,3	60	6,5	68
<i>A1к</i>	1,6	38	3,5	38	5,5	40	7,4	44	8,5	58
<i>A2к</i>	1,5	42	3,0	46	4,3	53	5,5	59	6,8	66
<i>A3к</i>	1,4	46	2,9	48	4,1	55	5,3	60	6,3	69
<i>A2г</i>	1,6	38	3,1	45	3,7	61	4,4	67	5,3	74
<i>A3г</i>	1,1	58	2,0	64	2,8	70	3,2	76	4,1	80
	1,2	0	1,4	7	1,7	0	1,8	5	2,0	20
Исходные дирекционные углы промежуточных сторон										
<i>B1</i>	1,7	35	4,3	23	6,8	26	9,2	31	11,0	46
<i>B2</i>	1,6	38	3,9	30	5,7	38	7,1	47	8,6	57
<i>B3</i>	1,5	42	3,5	38	4,8	50	6,1	54	7,0	65
<i>B1к</i>	1,3	50	3,8	32	6,2	33	8,4	37	9,9	51
<i>B2к</i>	1,3	50	3,6	36	4,9	47	6,4	52	7,6	62
<i>B3к</i>	1,3	50	3,2	43	4,2	54	5,9	56	6,5	68
<i>B1г</i>	1,4	46	3,5	38	4,8	50	5,6	58	6,6	67
<i>B2г</i>	1,3	50	2,8	50	3,6	61	4,2	76	6,1	70
	1,2	0	1,3	13	1,6	6	1,8	5	2,1	16

Примечание: Для получения сдвигов пунктов сдвоенного ряда трилатерации, созданного любым дальнимером, необходимо имеющиеся в таблице сдвиги умножить на среднюю квадратическую погрешность измерения сторон сети. Например, для расчета точности ряда трилатерации со сторонами длиной $s=5$ км, измеренными радиодальнимером «Луч», необходимо табличные сдвиги умножить на $m_s = (3+3 \cdot 10^{-6}s) = 4,5$ см.

2. Одиночные дирекционные углы связующих и промежуточных сторон, равномерно расположенных в сети, примерно так же действуют на точность положения пунктов. Если между исходными дирекционными углами имеется 21 треугольник, то поперечный сдвиг наиболее удаленной стороны уменьшается на 33—46%. Если между ними имеется 10—11 треугольников, то поперечный сдвиг этой же точки уменьшается на 54—62%, а

Средние квадратические смещения
некоторых пунктов строенного ряда

Варианты	Диagonalь	Пункты									
		2		4		6		8		11	
		сдвиги	изм-нен., %	сдвиги	изм-нен., %	сдвиги	изм-нен., %	сдвиги	изм-нен., %	сдвиги	изм-нен., %
Свободная сеть	KL	2,6	—	5,4	—	8,6	—	12,0	—	17,5	—
		1,2	—	1,5	—	1,6	—	1,8	—	2,0	—
	MN	2,0	—	4,7	—	7,7	—	10,9	—	16,1	—
		0,9	—	1,6	—	2,0	—	2,3	—	2,7	—
Исходные дирекционные углы связующих сторон											
B1	KL	2,3	12	4,5	17	6,7	22	8,8	27	11,7	33
	MN	2,0	0	4,7	0	7,7	0	10,8	1	15,8	2
B2	KL	2,1	19	3,7	31	4,8	44	6,0	50	8,0	54
	MN	2,0	0	4,7	0	7,7	0	10,8	1	15,8	2
B3	KL	2,0	23	3,1	43	4,3	50	5,1	58	6,7	62
	MN	2,0	0	4,7	0	7,7	0	10,8	1	15,6	3
B1к	KL	1,6	38	3,1	43	4,8	44	6,3	48	8,1	54
	MN	1,5	25	3,0	36	4,5	42	6,1	44	7,9	51
B2к	KL	1,5	42	2,9	46	3,9	55	4,9	59	6,3	64
	MN	1,5	25	2,8	40	3,8	51	4,9	55	6,2	61
B3к	KL	1,5	42	2,5	54	3,6	58	4,4	63	5,7	67
	MN	1,5	25	2,5	47	3,5	55	4,4	60	5,5	66
B2г	KL	1,5	42	2,7	50	3,2	63	3,7	69	4,8	72
	MN	1,4	30	2,6	45	3,4	56	3,7	66	4,7	71
B3г	KL	1,5	42	2,1	61	2,7	69	3,0	75	3,9	78
		1,1	8	1,3	13	1,5	6	1,7	6	1,8	10
	MN	1,5	25	2,3	51	2,7	65	3,2	71	3,7	77
		0,9	0	1,4	12	1,8	10	2,0	13	2,4	11
Исходные дирекционные углы промежуточных сторон											
Г1	KL	1,6	38	3,7	31	5,8	33	7,6	37	9,4	46
	MN	2,0	0	4,6	2	7,3	5	10,0	8	13,9	14
Г2	KL	1,5	42	3,3	39	4,5	48	5,4	55	6,7	62
	MN	2,0	0	4,6	2	7,0	9	9,6	12	13,3	17
Г3	KL	1,4	46	2,7	50	3,7	57	4,6	62	5,4	69
	MN	2,0	0	4,4	6	6,8	12	9,3	15	13,0	19
Г1к	KL	1,2	54	3,0	44	4,7	45	6,4	47	7,8	55
	MN	2,0	0	4,5	4	7,2	6	9,9	9	13,7	15
Г2к	KL	1,2	54	2,7	50	3,9	55	4,7	61	5,9	66
	MN	2,0	0	4,5	4	7,0	9	9,4	14	13,2	25
Г3к	KL	1,2	54	2,3	57	3,2	63	4,2	65	4,9	72
	MN	2,0	0	4,4	6	6,8	12	9,3	15	13,1	19
Г2г	KL	1,2	54	2,6	52	3,3	62	4,1	66	5,2	70
	MN	2,0	0	4,5	4	6,9	10	9,3	15	13,1	19
Г3г	KL	1,2	54	1,8	67	2,7	69	3,3	28	4,0	77
		1,1	8	1,3	13	1,5	6	1,8	0	1,9	5
	MN	2,0	0	4,4	6	6,7	13	9,2	16	12,8	20
		0,9	0	1,5	6	1,8	10	2,1	9	2,4	11

при 6—7 треугольниках — на 62—69%. Но так уменьшаются только сдвиги пунктов того ряда треугольников, в котором расположены стороны с исходными дирекционными углами. Точность положения пунктов крайних диагоналей в строенном ряде практически не меняется или изменяется мало (наибольшее изменение составляет 19% в варианте ГЗ).

3. Дополнительные исходные дирекционные углы сторон, расположенных на краях сети, мало влияют на точность положения пунктов, размещенных в середине сети. Они уменьшают их поперечные сдвиги примерно на 5—10%. Без изменений остаются сдвиги пунктов диагонали MN в вариантах с исходными дирекционными углами промежуточных сторон. В вариантах с исходными дирекционными углами связующих сторон дополнительные исходные дирекционные углы крайних сторон вызвали значительное уменьшение поперечных сдвигов пунктов диагонали MN . В вариантах $B1к$, $B2к$ и $B3к$ поперечные сдвиги пунктов диагоналей KL и MN с одинаковыми номерами почти равны.

4. Наличие трех-четырёх групп по два-три дирекционных угла связующих или промежуточных сторон приводит к существенному уменьшению поперечных сдвигов наиболее удаленных пунктов в середине сети (на 70—80%). Погрешности положения пунктов диагонали MN , находящейся на краю сети, значительно уменьшаются только в вариантах $B2г$ и $B3г$, т. е. при группах дирекционных углов связующих сторон.

5. Из сравнения приведенных в таблицах предельных сдвигов пунктов свободной сети со сдвигами пунктов в сетях с наибольшим числом исходных дирекционных углов можно сделать вывод, что действие исходных дирекционных углов на продольные сдвиги пунктов незначительно. Но поскольку продольные сдвиги в сетях трилатерации в несколько раз меньше поперечных, то это не ослабляет действия дирекционных углов на точность этих сетей.

6. Из исследований вариантов строенного ряда наиболее оптимальные варианты $B2к$ и $B2г$. В них закономерность накопления погрешностей в положении пунктов в середине сети и на ее краю почти одинакова, а соотношение продольного и поперечного сдвигов конечного пункта равно примерно 1:3. Следовательно, сети с таким расположением дирекционных углов довольно однородны по точности положения ее пунктов. Дальнейшее увеличение числа дирекционных углов связующих сторон ведет к повышению точности, но с меньшим эффектом.

Выполненные исследования показывают, что точность сетей трилатерации можно значительно повысить, определяя дирекционные углы связующих сторон. Такой путь повышения точности можно рекомендовать для сетей трилатерации, создаваемых радиодальномерами РДГВ и «Луч». Дирекционные углы в них нужно определять астрономическими методами с точностью не ниже $0,7''$. При этом относительная погрешность дирекционных углов будет в три-четыре раза меньше относительной погреш-

ности измерения сторон сети радиодальномерами. Астрономические определения необходимо делать на 2—3 связующих сторонах на каждом краю сети, а если в одном ряду сети много треугольников, то дирекционные углы необходимо определять также в середине сети на связующих сторонах, по два-три через каждые 10 треугольников.

Список литературы: 1. *Бронштейн Г. С.* К вопросу об оценке точности ряда трилатерации. — Инж.-строит. изыскания. М.: Стройиздат, 1974, № 1 (34). 2. *Костецкая Я. М.* Учет исходных дирекционных углов при оценке точности сетей трилатерации. — Труды конференции «50 лет ленинского декрета об учреждении ВГУ». Изд-во Львов. ун-та, 1970. 3. *Костецкая Я. М.* О влиянии твердых дирекционных углов сторон ряда трилатерации на точность положения пунктов. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1977, вып. 25. 4. *Костецкая Я. М.* К вопросу оценки точности сплошных сетей трилатерации. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1967, вып. 6.

Статья поступила в редколлегию 29.01.81