

О ВЛИЯНИИ ОШИБОК ИСХОДНЫХ ПУНКТОВ НА ТОЧНОСТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ

В [3] было показано, что элементы матрицы A преобразования пространственных прямоугольных координат можно определить из решения уравнения

$$A = \frac{1}{m} B' B^{-1}, \quad (1)$$

где m — масштабный множитель;

$$B' = \begin{pmatrix} X'_2 - X'_1 & X'_3 - X'_2 & X'_4 - X'_3 \\ Y'_2 - Y'_1 & Y'_3 - Y'_2 & Y'_4 - Y'_3 \\ Z'_2 - Z'_1 & Z'_3 - Z'_2 & Z'_4 - Z'_3 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} X_2 - X_1 & X_3 - X_2 & X_4 - X_3 \\ Y_2 - Y_1 & Y_3 - Y_2 & Y_4 - Y_3 \\ Z_2 - Z_1 & Z_3 - Z_2 & Z_4 - Z_3 \end{pmatrix};$$

B^{-1} — матрица, обратная B .

В (1) координаты в новой системе выражены через X'_i, Y'_i, Z'_i , а в старой — через X_i, Y_i, Z_i .

Определение элементов a_{ij} матрицы A по (1) сводится к вычислению определителей, например

$$a_{12} = \frac{\begin{vmatrix} X_2 - X_1 & X_3 - X_2 & X_4 - X_3 \\ X'_2 - X'_1 & X'_3 - X'_2 & X'_4 - X'_3 \\ Z_2 - Z_1 & Z_3 - Z_2 & Z_4 - Z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_2 - X_1 & X_3 - X_2 & X_4 - X_3 \\ Y_2 - Y_1 & Y_3 - Y_2 & Y_4 - Y_3 \\ Z_2 - Z_1 & Z_3 - Z_2 & Z_4 - Z_3 \end{vmatrix}}.$$

После преобразований из (1) получим

$$a_{11} = \left(1 + \frac{\begin{vmatrix} d\Delta X_{12} & d\Delta X_{23} & d\Delta X_{34} \\ \Delta Y_{12} & \Delta Y_{23} & \Delta Y_{34} \\ \Delta Z_{12} & \Delta Z_{23} & \Delta Z_{34} \end{vmatrix}}{\Delta} \right) \frac{1}{m};$$

$$a_{12} = \left(\frac{\begin{vmatrix} \Delta X_{12} & \Delta X_{23} & \Delta X_{34} \\ d\Delta X_{12} & d\Delta X_{23} & d\Delta X_{34} \\ \Delta Z_{12} & \Delta Z_{23} & \Delta Z_{34} \end{vmatrix}}{m \cdot \Delta} \right);$$

$$a_{13} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta X_{12} & \Delta X_{23} & \Delta X_{34} \\ \Delta Y_{12} & \Delta Y_{23} & \Delta Y_{34} \\ d\Delta X_{12} & d\Delta X_{23} & d\Delta X_{34} \end{vmatrix}}{m \cdot \Delta}; \quad a_{21} = \frac{\begin{vmatrix} d\Delta Y_{12} & d\Delta Y_{23} & d\Delta Y_{34} \\ \Delta Y_{12} & \Delta Y_{23} & \Delta Y_{34} \\ \Delta Z_{12} & \Delta Z_{23} & \Delta Z_{34} \end{vmatrix}}{m \cdot \Delta};$$

$$a_{22} = \left(1 + \frac{\begin{vmatrix} \Delta X_{12} & \Delta X_{23} & \Delta X_{34} \\ d\Delta Y_{12} & d\Delta Y_{23} & d\Delta Y_{34} \\ \Delta Z_{12} & \Delta Z_{23} & \Delta Z_{34} \end{vmatrix}}{\Delta} \right) \frac{1}{m};$$

$$a_{23} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta X_{12} & \Delta X_{23} & \Delta X_{34} \\ \Delta Y_{12} & \Delta Y_{23} & \Delta Y_{34} \\ d\Delta Z_{12} & d\Delta Z_{23} & d\Delta Z_{34} \end{vmatrix}}{m \cdot \Delta};$$

$$a_{31} = \frac{\begin{vmatrix} d\Delta Z_{12} & d\Delta Z_{23} & d\Delta Z_{34} \\ \Delta Y_{12} & \Delta Y_{23} & \Delta Y_{34} \\ \Delta Z_{12} & \Delta Z_{23} & \Delta Z_{34} \end{vmatrix}}{m \cdot \Delta}; \quad a_{32} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta X_{12} & \Delta X_{23} & \Delta X_{34} \\ d\Delta Z_{12} & d\Delta Z_{23} & d\Delta Z_{34} \\ \Delta Z_{12} & \Delta Z_{23} & \Delta Z_{34} \end{vmatrix}}{m \cdot \Delta};$$

$$a_{33} = \left(1 + \frac{\begin{vmatrix} \Delta X_{12} & \Delta X_{23} & \Delta X_{34} \\ \Delta Y_{12} & \Delta Y_{23} & \Delta Y_{34} \\ d\Delta Z_{12} & d\Delta Z_{23} & d\Delta Z_{34} \end{vmatrix}}{\Delta} \right) \frac{1}{m}, \quad (2)$$

где $d\Delta X$, $d\Delta Y$, $d\Delta Z$ — разности приращений координат в новой и старой системах; $\Delta = \det(B)$. Формулы (2), как и (1), можно использовать при любых углах поворота одной системы координат относительно другой.

В [2] показано, что погрешности замены ортогональной матрицы кососимметрической при преобразовании не превысят 1 м, если углы ψ , ε , ω между осями координат будут менее 1'. В этом случае ортогональную матрицу можно заменить кососимметрической, т. е. трансформировать координаты по упрощенной формуле

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 & \psi & \varepsilon \\ -\psi & 1 & \omega \\ -\varepsilon & -\omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

При наличии координат четырех пунктов, не лежащих в одной плоскости, углы ψ , ε , ω между осями квазигеоцентрических систем легко определить по формулам:

$$\psi = \frac{\begin{vmatrix} \Delta X_{12} & \Delta X_{23} & \Delta X_{34} \\ \Delta X'_{12} & \Delta X'_{23} & \Delta X'_{34} \\ \Delta Z_{12} & \Delta Z_{23} & \Delta Z_{34} \end{vmatrix}}{m \cdot \Delta}; \quad \omega = \frac{\begin{vmatrix} \Delta X_{12} & \Delta X_{23} & \Delta X_{34} \\ \Delta Y_{12} & \Delta Y_{23} & \Delta Y_{34} \\ \Delta Y'_{12} & \Delta Y'_{23} & \Delta Y'_{34} \end{vmatrix}}{m \cdot \Delta};$$

$$\varepsilon = \frac{\begin{vmatrix} \Delta X_{12} & \Delta X_{23} & \Delta X_{34} \\ \Delta Y_{12} & \Delta Y_{23} & \Delta Y_{34} \\ \Delta X'_{12} & \Delta X'_{23} & \Delta X'_{34} \end{vmatrix}}{m \cdot \Delta}, \quad (4)$$

или

$$\psi = \frac{\begin{vmatrix} \Delta X_{12} & \Delta X_{23} & \Delta X_{34} \\ d\Delta X_{12} & d\Delta X_{23} & d\Delta X_{34} \\ \Delta Z_{12} & \Delta Z_{23} & \Delta Z_{34} \end{vmatrix}}{m \cdot \Delta}; \quad \omega = \frac{\begin{vmatrix} \Delta X_{12} & \Delta X_{23} & \Delta X_{34} \\ \Delta Y_{12} & \Delta Y_{23} & \Delta Y_{34} \\ d\Delta Y_{12} & d\Delta Y_{23} & d\Delta Y_{34} \end{vmatrix}}{m \cdot \Delta};$$

$$\varepsilon = \frac{\begin{vmatrix} \Delta X_{12} & \Delta X_{23} & \Delta X_{34} \\ \Delta Y_{12} & \Delta Y_{23} & \Delta Y_{34} \\ d\Delta X_{12} & d\Delta X_{23} & d\Delta X_{34} \end{vmatrix}}{m \cdot \Delta}, \quad (5)$$

которые получены из (1) и (2).

Пусть $\varepsilon = \omega = -\psi = \alpha$. Для этого случая погрешности преобразования координат, вызванные заменой ортогональной матрицы косимметрической, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Погрешности, вызванные заменой ортогональной матрицы косимметрической, мм

Погрешности	Углы между осями α , в с									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$ \delta X $	0,1	0,5	1,1	1,9	2,9	4,2	5,8	7,5	9,5	11,8
$ \delta Y $	0,2	0,9	2,1	3,8	5,9	8,5	11,5	15,0	19,0	23,5
$ \delta Z $	0,4	1,4	3,2	5,6	8,8	12,7	17,3	22,6	28,6	35,3

Как известно, вычислительные погрешности должны быть на порядок меньше ошибок измерений.

Использование новейших методов (длиннобазисная радиоинтерферометрия, лазерная локация Луны и ИСЗ и др.) приведет к созданию фундаментальных геодезических сетей, координаты опорных пунктов в которых на любой заданный момент времени будут известны с погрешностью $m = \pm 1$ см. Следовательно, при преобразовании таких систем необходимо использовать ортогональную матрицу, а не кососимметрическую.

Исследуем влияние погрешностей координат на точность определения параметров вращения по (4) и (5), которые можно представить функцией $f = \Delta_i / \Delta$, а ее среднюю квадратическую погрешность определим из выражения

$$m_f = \frac{1}{\Delta^2} \sqrt{m_{\Delta_i}^2 \cdot \Delta^2 + m_{\Delta}^2 \cdot \Delta_i^2 - 2\Delta_i \Delta \cdot m_{\Delta} \cdot m_{\Delta_i} r_i}, \quad (6)$$

где r_i — коэффициент корреляции.

Определитель знаменателя запишем в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & X_3 - X_1 & X_4 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 & Y_3 - Y_1 & Y_4 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 & Z_3 - Z_1 & Z_4 - Z_1 \end{vmatrix},$$

или

$$\Delta' = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & X_3 - X_1 & X_4 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 & Y_3 - Y_1 & Y_4 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 & Z_3 - Z_1 & Z_4 - Z_1 \end{vmatrix}.$$

После незначительных преобразований получим

$$\begin{aligned} \Delta - \Delta' = & -X_1 Y_3 Z_4 + X_1 Y_4 Z_3 - X_1 Y_4 Z_2 + X_1 Y_2 Z_4 - \\ & -X_1 Y_2 Z_3 + X_1 Y_3 Z_2 + X_2 Y_3 Z_4 - X_2 Y_3 Z_1 + X_2 Y_1 Z_4 - \\ & -X_2 Y_4 Z_3 + X_3 Y_4 Z_1 + X_3 Y_1 Z_3 + X_3 Y_1 Z_2 - X_3 Y_4 Z_1 - \\ & -X_3 Y_1 Z_2 - X_3 Y_2 Z_4 + X_3 Y_2 Z_1 + X_3 Y_1 Z_4 + X_4 Y_2 Z_3 - \\ & -X_4 Y_2 Z_1 - X_4 Y_1 Z_3 - X_4 Y_3 Z_2 + X_4 Y_3 Z_1 + X_4 Y_1 Z_2. \quad (7) \end{aligned}$$

Среднюю квадратическую погрешность m_{Δ} , вызванную ошибками координат исходных пунктов, вычислим по формуле [1]:

$$m_{\Delta}^2 = \sum_{i=1}^4 \left\{ \left(\frac{\partial \Delta}{\partial X_i} \right)^2 \cdot m_{X_i}^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial Y_i} \right)^2 \cdot m_{Y_i}^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial Z_i} \right)^2 \cdot m_{Z_i}^2 \right\}. \quad (8)$$

Представив определители числителей в (4) и (5) также в виде сумм тройных произведений координат, аналогичных (7), и вычислив погрешности m_{Δ_i} , находим коэффициенты корреляции r_i ($r_1 = +0,86655$, $r_2 = +0,94781$, $r_3 = +0,96195$). Для их вычисления мы взяли 11 вариантов (координаты четырех пунктов в двух системах и их погрешности) исходных данных. Отметим, что коэффициенты корреляции незначительно изменяются при увеличении вариантов.

Используя координаты пунктов космической триангуляции и трилатерации и их ошибки, приведенные в [4], рассчитаем средние квадратические погрешности m_ψ , m_ω , m_ε определения углов ψ , ω и ε по (4) и (5). Часть результатов этого вычислительного эксперимента приведена в табл. 2.

Таблица 2
Средние квадратические ошибки углов ψ , ω , ε
в секундах

№ исходных пунктов	Погрешности элементов поворота, вычисленных					
	по (4)			по (5)		
	m_ψ	m_ω	m_ε	m_ψ	m_ω	m_ε
4050—4082	2,89	8,89	7,03	2,89	8,89	7,03
4280—5201	3,37	3,90	2,45	3,37	3,90	2,45
5410—5713	0,35	0,42	0,42	0,35	0,42	0,42
5715—5721	0,28	1,02	0,97	0,28	1,02	0,97
5722—5730	0,39	0,56	0,53	0,38	0,56	0,53

Как и следовало ожидать, точность (4) и (5) одинакова. В то же время расчеты показали, что погрешности исходных пунктов вызывают значительные (порядка нескольких секунд) ошибки в определении угловых элементов ориентирования двух координатных систем.

Сдвиги X_0 , Y_0 , Z_0 одной системы относительно другой часто вычисляются после определения масштаба и элементов матрицы вращения по формуле

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_i \\ Y'_i \\ Z'_i \end{pmatrix} - m \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}, \quad (9)$$

причем вместо координат i -го пункта можно использовать средние значения из всей совокупности координат в одной (X_m , Y_m , Z_m) и в другой (X'_m , Y'_m , Z'_m) системах. Поэтому исследуем точность вычисления параметров сдвига по (9). Средние квадратические погрешности m_{X_0} , m_{Y_0} и m_{Z_0} вычислим так:

$$\begin{aligned} m_{X_0} &= \sqrt{m_{X'_i}^2 + m_{m_2}^2 (X_i^2 + \psi^2 Y_i^2 + \varepsilon^2 Z_i^2) + m_2^2 (m_\psi^2 Y_i^2 + \\ &\quad + m_\omega^2 Z_i^2 - m_X^2 + m_Y^2 \psi^2 + m_Z^2 \varepsilon^2);} \\ m_{Y_0} &= \sqrt{m_{Y'_i}^2 + m_{m_2}^2 (\psi^2 X_i^2 + Y_i^2 + \omega^2 Z_i^2) + m_2^2 (m_\psi^2 X_i^2 + \\ &\quad + m_\omega^2 Z_i^2 + m_X^2 \psi^2 + m_Y^2 + m_Z^2 \omega^2);} \\ m_{Z_0} &= \sqrt{m_{Z'_i}^2 + m_{m_2}^2 (\varepsilon^2 X_i^2 + \omega^2 Y_i^2 + Z_i^2) + m_2^2 (m_\psi^2 X_i^2 + \\ &\quad + m_\omega^2 Y_i^2 + m_X^2 \varepsilon^2 + m_Y^2 \omega^2 + m_Z^2);} \end{aligned} \quad (10)$$

где m_{m_2} — средняя квадратическая ошибка среднего весового значения масштаба $m_2 = [S_{ij}'] : [S_{ij}]$; $m_{X_i'}$, $m_{Y_i'}$, $m_{Z_i'}$, m_{X_i} , m_{Y_i} , m_{Z_i} — средние квадратические погрешности координат в новой (X_i' , Y_i' , Z_i') и старой (X_i , Y_i , Z_i) системах.

Результаты вычислений по координатам пунктов космических сетей показывают, что наибольшее влияние на m_{X_0} , m_{Y_0} , m_{Z_0} оказывают третьи члены в подкоренных выражениях (10), поэтому средние квадратические ошибки определения сдвигов можно найти по приближенным формулам:

$$\begin{aligned} m_{X_0} &= m_2 \sqrt{m_X^2 + m_\psi^2 Y_i^2 + m_\omega^2 Z_i^2}; \\ m_{Y_0} &= m_2 \sqrt{m_Y^2 X_i^2 + m_\psi^2 + m_\omega^2 Z_i^2}; \\ m_{Z_0} &= m_2 \sqrt{m_X^2 X_i^2 + m_\psi^2 Y_i^2 + m_\omega^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Как показывают вычисления, погрешности этих формул менее 10% величин m_{X_0} , m_{Y_0} , m_{Z_0} , вычисленных по (10), причем основное влияние на ошибки сдвигов оказывают погрешности m_ψ , m_ω , m_ϵ определения углов.

Некоторые авторы, к примеру К. Риннер [5], не вычисляют сдвиги вообще. В этом случае преобразование осуществляется так:

$$\begin{pmatrix} X_i' \\ Y_i' \\ Z_i' \end{pmatrix} = m \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X_i - X_1 \\ Y_i - Y_1 \\ Z_i - Z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1' \\ Y_1' \\ Z_1' \end{pmatrix}. \quad (12)$$

О целесообразности вычисления сдвигов вообще можно судить, исследовав погрешности преобразованных координат, поскольку критерием оценки могут быть только они. Поэтому вычислим средние квадратические ошибки преобразованных координат для двух схем трансформирования квазигеоцентрических систем: 1) сдвиги находим из (9), а координаты вычисляем по (3) с косимметрической матрицей; 2) сдвиги вообще не вычисляем, а трансформированные координаты находим по (12). Так как точность определения ψ , ω и ϵ по (4) и (5) одинакова, углы можно вычислять по любой из них.

Для этих двух схем трансформирования мы рассчитали средние квадратические ошибки преобразованных координат для 15 пунктов, координаты и погрешности которых были взяты из [4]. В среднем по 15 пунктам получены следующие соотношения ошибок, преобразованных по схеме 1, координат к погрешностям координат, трансформированным по схеме 2:

- по оси X — 1,94,
- по оси Y — 1,37,
- по оси Z — 3,03.

Среднее соотношение погрешностей, полученное в данном эксперименте, 2,11.

На основании этих исследований можно заключить, что формулы (4) и (5), представляют несложные зависимости между углами ψ , ε , ω (с одной стороны) и приращениями координат (или их изменениями) и масштабом преобразования (с другой стороны). С их помощью можно легко определить углы между осями квазигеоцентрических систем координат.

Точность определения углов ψ , ω , ε между осями квазигеоцентрических систем координат по (4) и (5) одинакова. При вычислении углов ψ , ω , ε по (4) и (5), вследствие ошибок координат исходных пунктов, погрешности определения параметров вращения могут достигать нескольких секунд.

Если определение параметров преобразования производится алгебраическим методом (без уравнивания), то сдвиги одной системы относительно другой нецелесообразно вычислять вообще. В этом случае преобразованные координаты следует определять по (12).

Список литературы: 1. *Большаков В. Д., Гайдаев П. А.* Теория математической обработки геодезических измерений. — М.: Недра, 1977. 2. *Кириллов В. Г.* К вопросу о преобразовании ортогональных систем координат в спутниковой геодезии. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1978, вып. 27. 3. *Кириллов В. Г.* Анализ методов определения элементов ортогональной матрицы преобразования. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1981, вып. 34. 4. *Mueller I. I.* Global satellite triangulation and trilateration results. — Journal of geophysical research, 1974, v. 79, № 35. 5. *Rinner K.* Die räumliche Drehstreckung. — Acta technica Academiae Scientiarum Hungaricae, 1965, Bd. 52, № 3—4.