

После выполнения минимизации (21) с учетом (17), (22) вектор X искомым N параметров m_i (мы не приводим здесь подробного вывода) можно найти из матричного уравнения

$$X = (W^T C_{nn}^{-1} W + \alpha F)^{-1} W^T C_{nn}^{-1} L, \quad (23)$$

подбирая параметр α из условия

$$\bar{n}^T C_{nn}^{-1} \bar{n} = nd, \quad (24)$$

где d — дисперсия результатов измерений. В (23) $W = [\omega_{ji}]_{n,N}$ — матрица $(n \times N)$ с элементами $\omega_{ji} = \omega_i(j)$ из функций (4) ω_i вычисляемых в точках j с известными аномалиями Δg_j (индекс соответствует таковому в (4)); L — вектор $(n \times 1)$ значений Δg_j ; матрица F размерностью $(N \times N)$ имеет тот же смысл, что и в (20).

В заключение отметим, что при определенных условиях параметр регуляризации α можно положить равным единице и поэтому появляется возможность, не учитывая (24), находить решение только по (23), где $\alpha=1$. Из монографии [5] следует, что такими условиями должны быть равномерность и равномерное распределение измеренных величин Δg_j на поверхности Земли, а также совпадение воспроизводящего ядра используемого гильбертова пространства $\Gamma_2^q(\Sigma)$ с эмпирической ковариационной функцией геопотенциала (фактически совпадение коэффициентов k_n^q разложения воспроизводящего ядра $K^q(A, B)$ со степенными дисперсиями возмущающего потенциала T). Последнее соответствует выбору воспроизводящего ядра [9] ($q=2,5$), для которого, кстати, найдено замкнутое выражение, и одновременно гарантирует минимальную из возможных среднюю квадратическую ошибку аппроксимации. К настоящему времени выяснено, что выполнение обсуждаемых условий обеспечивается приближенно лишь в глобальном и региональном масштабах. Поэтому использование алгоритма (23) с $\alpha=1$, естественно, будет оправдано при построении глобальных моделей точечных масс гравитационного потенциала, например, в целях спутниковой геодезии и прогнозирования положения ИСЗ методом численного интегрирования уравнений движения. В случае же аппроксимации с помощью (1) детального поля остается в силе применение (24) для определения параметра α .

На практике при реализации описанных алгоритмов (8), (20), (23) необходимо гарантировать также следующие условия, связывающие коэффициенты m_i : сумма их величин (точечных масс) должна равняться нулю, а центр масс получаемой многоточечной модели целесообразно совместить с центром масс Земли. В случае выполнения этих условий величина $T_N \approx T$, определяемая выражением (1), не содержит шаровых функций нулевой и первой степени и тем самым гарантирует принадлежность $T_N \in \Gamma_2^q(\Sigma)$ к корректному множеству решений $\Gamma_2^q(\Sigma)$.

Список литературы: 1. Алексидзе М. А. Об одном представлении аномального гравитационного поля. — ДАН СССР, 1966, т. 170, № 4. 2. Алексидзе М. А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функци-

ям. — М.: Наука, 1978. 3. Марченко А. Н. О некоторых теоретических аспектах представления геопотенциала потенциалом системы точечных масс. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1982, № 3. 4. Марченко А. Н. О разложении потенциала планеты по системе фундаментальных решений уравнения Лапласа. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1982, № 4. 5. Нейман Ю. М. Вариационный метод физической геодезии. — М.: Недра, 1979. 6. Пеллини Л. П. Методика разложения гравитационного потенциала по сферическим функциям. — Тр. ЦНИИГАиК, М., 1966, вып. 171. 7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. 8. Krurup T. A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy, Danish Geod. Inst., Publ. No 44, Copenhagen, 1969. 9. Tscherning C. C., Rapp R. H. Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations and deflection of vertical implied by anomaly degree variance models, Report No 208, Dept. of Geodetic Science, Ohio State Univer., Columbus, 1974.

Статья поступила в редколлегию 08. 01. 82

ИДК 528.21/22

А. Н. МАРЧЕНКО

О СТАБИЛИЗАТОРАХ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МНОГОТОЧЕЧНОЙ МОДЕЛИ ГЕОПОТЕНЦИАЛА ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Задача построения математической модели возмущающего потенциала T Земли в виде суммы потенциалов точечных масс, расположенных внутри планеты (представление T рядом фундаментальных решений $\left\{ \frac{1}{r_i} \right\}$ уравнения Лапласа), имеет определенные преимущества перед классическим разложением T по системе шаровых функций. Однако главным недостатком первого описания T перед вторым является неоднозначность выбора базисной системы $\left\{ \frac{1}{r_i} \right\}$ неортогональных функций (r_i — расстояние от i -й точечной массы до текущей точки). Действительно, если система $\left\{ \frac{1}{r_i} \right\}$ задана, то определение коэффициентов m_i разложения T (величин точечных масс) возможно и единственно [1, 4]. В то же время функции $\frac{1}{r_i}$ определенным образом связаны с некоторой «несущей» точечные массы m_i поверхностью σ_h с тем лишь ограничением, что последняя должна быть поверхностью Ляпунова. Поэтому имеется большая свобода выбора σ_h , а значит, и функций $\left\{ \frac{1}{r_i} \right\}_{\sigma_h}$ (точки $i \in \sigma_h$), обуславливающих заданную точность аппроксимации. Таким образом, подход к указанной задаче, как к некорректной, является естественным, что приводит к использованию в этом случае методов решения некорректных задач.

Построение модели точечных масс в рамках задачи Молоденского (точнее, определение коэффициентов m_i) рассмотрено в [5] с использованием метода регуляризации Тихонова [6], причем в качестве стабилизатора выбран квадрат нормы $\|T_N\|_q^2$ потенциала

$$T_N = \sum_{i=1}^N m_i \frac{1}{r_i} \approx T \quad (1)$$

N точечных масс в гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром $\Gamma_{\frac{1}{2}}^q(\Sigma)$ [6] функций, гармонических вне сферы Бьерхаммара и регулярных на бесконечности. Таким образом, для определения величин m_i вариационным методом желательно иметь аналитические выражения $\|T_N\|_q^2$ при различных q . Кроме того, наличие последних позволяет ставить задачу на оптимальность той или иной системы $\left\{\frac{1}{r_i}\right\}$ и в случае ее успешного решения фиксировать соответствующие N функций $\frac{1}{r_i}$. Обсуждению этих вопросов посвящена наша статья.

1. В результате разложения обратных расстояний $\frac{1}{r_i}$ в ряд шаровых функций Π_{nl}^q [6], которые являются ортонормированным базисом в $\Gamma_{\frac{1}{2}}^q(\Sigma)$, после необходимых преобразований найдем для $\|T_N\|_q^2$ представление

$$\|T_N\|_q^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_i m_j \left[\frac{1}{R_B^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k_n^q} h_{ij}^n P_n(\cos \psi_{ij}) \right], \quad (2)$$

в котором R_B — радиус сферы Бьерхаммара; $h_{ij} = (d_i d_j) / R_B^2$, где d_i и d_j — расстояния от начала координат до i -й и j -й точечных масс; ψ_{ij} — угол между направлениями d_i , d_j (сферическое расстояние) с вершиной в начале координат; k_n^q — коэффициенты разложения воспроизводящего ядра $K^q(A, B)$ пространства $\Gamma_{\frac{1}{2}}^q(\Sigma)$ [6] в ряд по функциям Π_{nl}^q , причем $k_n^q = c/n^{2q-2}$, $c = \text{const}$.

Для изучения сходимости степенного относительно h_{ij} ряда в (2) исследуем мажорантный ему ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k_n^q} h_{ij}^n. \quad (3)$$

Поскольку ряд (3) имеет только положительные члены, то, воспользовавшись признаком Даламбера (построив предварительно соответствующую вариацию и выполнив предельный переход), можно убедиться, что степенной ряд (3) сходится равномерно при $h_{ij} < 1$, а значит, в силу известного признака Вейерштрасса, последнее условие гарантирует и равномерную сходимость обсуждаемого ряда (2).

В [6] уже отмечалось, что для принадлежности функций $\frac{1}{r_i} \in \Gamma_{\frac{1}{2}}^q(\Sigma)$ при любом q необходимо и достаточно, чтобы несущая поверхность σ_h лежала внутри сферы Бьерхаммара. Действительно, так как для $q \geq 2$ гармонические функции из $\Gamma_{\frac{1}{2}}^q(\Sigma)$ всегда непрерывны на упомянутой сфере [6], то совмещение σ_h лишь в нескольких точках со сферой Бьерхаммара σ_B сразу приводит к обращению в них соответствующих им функций $\frac{1}{r_i}$ в бесконечность, нарушая тем самым условия непрерывности на σ_B . По аналогичной причине поверхность σ_h не может лежать вне сферы σ_B , ибо в этом случае элементы $\frac{1}{r_i} \notin \Gamma_{\frac{1}{2}}^q(\Sigma)$.

Таким образом, выражение (2) будет иметь смысл только тогда, когда для произвольного p ($p=1, 2, \dots, N$) выполняется $d_p < R_B$, несмотря на то что из условия $h_{ij} < 1$ следует $d_i d_j < R_B^2$.

2. При дальнейшем использовании (2) удобно просуммировать ряд по n для конкретно выбранных $\Gamma_{\frac{1}{2}}^q(\Sigma)$ (т. е. для конкретных q). В результате удачного суммирования (2) примет следующий вид:

$$\|T_N\|_q^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_i m_j F_{ij}^q, \quad (4)$$

где F_{ij}^q — замкнутое выражение (результат суммирования по n), представляющее собой скалярное произведение $\left(\frac{1}{r_i}, \frac{1}{r_j}\right)_{\Gamma_{\frac{1}{2}}^q(\Sigma)}$.

Известно [6], что реальный возмущающий потенциал T , гармонически продолженный до σ_B , можно считать принадлежащим $T \in \Gamma_{\frac{1}{2}}^q(\Sigma)$ при $q < 1,5 \dots 2,0$. Выбирая поэтому в качестве стабилизатора $\|T_N\|_q^2$ для $1 \leq q \leq 2$, имеет смысл получить из (2) функции F_{ij}^q при $q=1$; $q=1,5$; $q=2$ с целью нахождения приближенного решения $T_N \approx T$ на одном из множеств $\Gamma_{\frac{1}{2}}^q(\Sigma)$. Опуская подробные выводы, приведем окончательные соотношения для некоторых воспроизводящих ядер.

а) Пусть $k_n^1 = 2$, что соответствует ядру Т. Краупа [9]. Тогда легко найти из (2):

$$F_{ij}^{kr} = F_{ij}^1 = \frac{1}{2R_B^2 L_{ij}}, \quad L_{ij} = \sqrt{1 + h^2 - 2h\nu}, \quad h = h_{ij}, \quad \nu = \cos \Psi_{ij}. \quad (5)$$

б) Для $q=1,5$ рассмотрим $k_n^{1,5} = 1/(n+1)$ (асимптотика так называемого логарифмического ядра). Используя возможность в (2) почленного дифференцирования ряда как степенного относительно h_{ij} , убедимся, что

$$F_{ij}^{1,5} = F_{ij}^{1,5} = \frac{1 - h\nu}{R_B^2 L^3}, \quad L = L_{ij}. \quad (6)$$

в) Отметим, что для случая $q=2$ известны несколько воспроизводимых ядер [7], асимптотика которых достаточно хорошо согласуется со спектром степенных дисперсий возмущающего потенциала. При отыскании замкнутых выражений, соответствующих F_{ij}^2 , оказывалось удобным, кроме почленного дифференцирования ряда (2), воспользоваться дифференциальным уравнением Лежандра [3] и найти вначале вспомогательное соотношение при $k_n^2 = 1/n(n+1)$

$$F^{(1)} = F_{ij}^2 = \frac{2vh^3 - (v^2 + 3)h^2 + 2vh}{R_B^2 L^5} \quad (7)$$

Затем на основании (7) уже довольно просто были получены необходимые выражения для рекомендуемых в [6] ядер: при $k_n^2 = c_1/n(n-1)$, ($k_0^2 = k_1^2 = 0$) —

$$F^{(2)} = F_{ij}^2 = \frac{2h^4 - 4vh^3 - (1 - 3v^2)h^2}{c_1 R_B^2 L^5} \quad (8)$$

и при $k_n^2 = c_2/(n-1)(n-2)$, ($k_0^2 = k_1^2 = k_2^2 = 0$) —

$$F^{(3)} = F_{ij}^2 = \frac{6h^4 - 18vh^3 + (5 + 15v^2)h^2 - 10vh + 2 - 2L^5}{c_2 R_B^2 L^5} \quad (9)$$

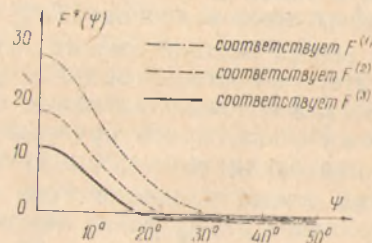
Найденные замкнутые соотношения (5)–(9) для некоторых из функций F_{ij}^q могут непосредственно использоваться на практике, например, в алгоритмах (20) или (23) [5] определения величин точечных масс вариационным методом.

3. Отметим, что в результате решения задачи Молоденского методом регуляризации находится такая оценка $\hat{T} \in \Gamma_2^q(\Sigma)$ для возмущающего потенциала $T \approx \hat{T}$, которая обладает наименьшей нормой в $\Gamma_2^q(\Sigma)$ [6] и в этом смысле — решение наиболее гладкое. На основании одной теоремы Н. П. Жидкова (см. [7], теорема 20.2) предложено потенциал \hat{T} наименьшей нормы считать оптимальным и пользоваться им и в том случае, когда параметр α в сглаживающем функционале Тихонова равен нулю.

Задавая различные конечные системы N функций $\frac{1}{r_i}$ (варьируя только расположением точечных масс), мы можем находить коэффициенты m_i вариационным методом [6] и тем самым определить множество P возможных решений $\hat{T} = T_N \in P$, каждое из которых для конкретной системы $\left\{ \frac{1}{r_i} \right\}$ будет обладать наименьшей нормой в пространстве $\Gamma_2^q(\Sigma)$. Естественно воспользоваться следствием указанной теоремы и пытаться выбирать такую систему функций $\left\{ \frac{1}{r_i} \right\}$, которая обеспечивала бы потенциал \hat{T}_N с

минимальной нормой из всех возможных элементов $T_N \in P$. Однако с практической точки зрения решение последней задачи независимо от величины и знака m_i оказывается нецелесообразным, так как ведет к большим теоретическим и вычислительным трудностям. Лучше допустить некоторые упрощения и получить простое приближенное решение для выбора системы $\left\{ \frac{1}{r_i} \right\}$, не приводящее (с позиции величины нормы функции $T_N \in P$) к наихудшему

Рис. 1. Графики функций $F^q(\psi) = R_{BC}^2 \cdot F_{ij}^q$ (для случая $q=2$ и функций $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$, рассчитанных при $R_0/R_B = 0,8$).



варианту и гарантирующее устойчивое определение m_i . Поэтому для дальнейших расчетов представим (4) в следующем виде:

$$\|T_N\|_q^2 = \sum_{i=1}^N m^2 F^q + \sum_{i,j(i \neq j)}^N m_i m_j F_{ij}^q \quad (10)$$

и обсудим качественные и количественные характеристики функций F_{ij}^q .

На основании (2), (4)–(9) можно заключить, что для выбранного q функции F_{ij}^q ($\psi_{ii} = 0$) всегда положительны и возрастают при изменении h_{ii} от нуля до единицы ($0 < h_{ii} < 1$). Когда же $h_{ij} = \text{const}$, то всякая $F_{ij}^q = F_{ij}^q(\psi)$ при изменении $\psi = \psi_{ij}$ от 0° до 180° в общем случае вначале убывает, обращается первый раз в нуль при некотором $\psi = \psi_0$ и далее незначительно (по сравнению с $F_{ij}^q(\psi=0) > F_{ij}^q(\psi)$) уклоняется от нуля в отрицательную и положительную сторону (рис. 1). Исключением из рассмотренных F_{ij}^q , однако, являются функции (5) — $q=1$, (6) — $q=1,5$, которые на интервале $0^\circ < \psi < 180^\circ$ всегда положительны.

Таким образом, поведение $F_{ij}^q(h, \psi)$ можно охарактеризовать так: их абсолютная величина тем больше, чем больше значение $h = h_{ij}$. Но при $h = \text{const}$ и увеличении ψ от 0° до 180° функции $F_{ij}^q(\psi)$ в целом уменьшаются. Причем скорость их убывания существенно зависит от индекса q и коэффициентов k_n^q воспроизводящего ядра $\Gamma_2^q(\Sigma)$ (см. (2) и находит свое выражение в параметре ψ_0 . Чем меньше ψ_0 , тем больше осцилляция $F_{ij}^q(\psi)$ при $\psi > \psi_0$, т. е. после своего первого нуля.

Полученные на практике результаты построения многоточечных моделей Земли и планет традиционной методикой способа наименьших квадратов позволяют заключить, что точечные массы

выгодно (с точки зрения аппроксимации) располагать либо на некоторой сфере, либо на поверхности, близкой к сферической.

Положив в основу этот практический вывод, остановимся на простом варианте, когда несущая поверхность σ_N является сферой радиуса $R_0 = d_i = d_j$ и N точечных масс расположены на ней равномерно на сферическом расстоянии $\Delta\psi$ друг от друга (последнее можно подсчитать, задавшись конкретным N).

Используя рассмотренные выше свойства функций F_{ij}^q , отметим, что в такой ситуации для конкретного R_0 и разных наборов N точечных масс величина $\|T_N\|_q^2$ будет главным образом зависеть от всегда положительного первого слагаемого в (10) и тех членов второго слагаемого, для которых $\psi_{ij} = \Delta\psi$. При этом можно выделить три основных варианта: сумма членов второго слагаемого положительна, и это приведет к относительному увеличению $\|T_N\|_q^2$; она отрицательна, что даст уменьшение квадрата нормы; возможна также и компенсация членов второго слагаемого, и тогда величина $\|T_N\|_q^2$ равна первому слагаемому в (10). Каждый из этих случаев обусловлен не только видом F_{ij}^q , но и величинами и знаками коэффициентов m_i , которые находятся из аппроксимации T и по абсолютной величине обычно одного порядка. При поиске минимума (10) нам более всего подходит второй вариант, меньше — третий и еще менее выгоден — первый. Приведенная схема обладает достаточной общностью, потому что для заданного R_0 «главные» в (10) функции F_{ii}^q не зависят от плановых координат и равны между собой при всех i ($1 \leq i \leq N$) т. е. равны для произвольных наборов N точечных масс, расположенных на сфере одного радиуса R_0 .

Поскольку подбор в (10) отрицательного второго слагаемого путем варьирования величин m_i сопряжен с большими вычислительными трудностями, естественно остановиться на третьем случае. Он не является наилучшим с точки зрения минимума $\|T_N\|_q^2$ для каждого R_0 , но не будет приводить и к наихудшему варианту. Кроме того, достижение полной или почти полной компенсации членов второго слагаемого (10) за счет только малости F_{ij}^q приводит к диагонально доминирующей матрице $F = [F_{ij}^q]_{N,N}$, входящей в алгоритм (23) [5] вычисления коэффициентов m_i вариационным методом, и, следовательно, всегда обеспечит стабильность решения.

Поэтому, учитывая свойства функций F_{ij}^q , будем ориентироваться на то, что всегда можно приближенно гарантировать

$$\|T_N\|_q^2 \approx \sum_{i=1}^N m_i^2 F_{ii}^q, \quad (11)$$

если положить для заданного $\Delta\psi$

$$F_{ij}^q(\Delta\psi) = F^q(\Delta\psi) = 0 \quad (12)$$

и найти такой корень уравнения (12), при котором $F^q(\Delta\psi)$ первый раз обращается в нуль. Отметим, кстати, что подобный подход удачно использован в [10] при построении интерполяционного ряда с применением «функций ядра» и минимизации нормы поверхностного градиента, представляемого этими функциями.

Таким образом, использование (12) приводит к уравнению для нахождения величины R_0 по фиксированному значению $\Delta\psi$. Правда, выполнение этого условия невозможно для $F^{kr}(\Delta\psi)$, ($q=1$) и $F^l(\Delta\psi)$, ($q=1,5$). Но с практической точки зрения более важен тот факт, что решение выгодно искать [6] на таком гильбертовом пространстве $\Gamma_2^q(\Sigma)$, асимптотика воспроизводящего ядра которого близка к спектру степенных дисперсий реального возмущающего потенциала T . Отмеченная близость, в частности, характерна для $q=2$ и воспроизводящих ядер с коэффициентами k_n^2 , которые в скрытом виде фигурируют в (8), (9). Для полноты картины приведем решение задачи (11), (12) применительно к функциям $F^2(\Delta\psi)$, описываемым соотношениями (7) — (9).

Приравняв выражения (7) — (9) к нулю и решив соответствующие уравнения, получим квадрат отношения радиуса R_0 сферы, на которой теперь по (11), (12) должны быть размещены точечные массы к радиусу R_B сферы Бьерхаммара: $h_{ij} = h = R_0^2/R_B^2$. Для случая (7) получаем квадратное уравнение и, исключая неприемлемый здесь корень, находим

$$h = \frac{v^2 + 3 - \sqrt{v^4 - 10v^2 + 9}}{4v}, \quad v = \cos(\Delta\psi). \quad (13)$$

Из (8) аналогично имеем

$$h = v = \frac{\sqrt{2 - 2v^2}}{2}. \quad (14)$$

Для (9) получаем уравнение

$$6h^4 - 18vh^3 + (5 + 15v^2)h^2 - 10vh + 2 - 2L^5 = 0, \quad (15)$$

которое легко решается, если в качестве начального приближения принять (14).

На рис. 2 представлены найденные из (13) — (15) графики зависимости радиуса R_0 от числа N равномерно размещенных точечных масс, соответствующих различным воспроизводящим ядрам и индексу $q=2$. Интересно отметить, что R_0 , определяемая из (13), хорошо согласуется с радиусом сферы, вычисляемым по «наилучшей r -формуле» Р. Харди и В. Гопферта [8] (полученной из совершенно других соображений), но также зависящим от числа N . Однако воспроизводящее ядро (см. (7)), которое определяет (13), плохо согласуется со спектром степенных дисперсий T и имеет здесь вспомогательный характер. Для практических же целей, естественно, рекомендуется использовать (14) и (15).

4. Соотношения (13)–(15) гарантируют выполнение (11) для случая равноотстоящих точечных масс. Однако наилучшие результаты (в частности, и с точки зрения минимального числа N масс) на практике (см., напр., [2]) получают при неравномерном их размещении в плане — под экстремумами аномалий силы тяжести. С математической точки зрения это обусловлено «подобием» в отдельных регионах земной поверхности поля Δg полю соответствующим образом выбранных дискретных точечных масс, т. е. подобием аппроксимируемой и аппроксимирующей функций. Игно-

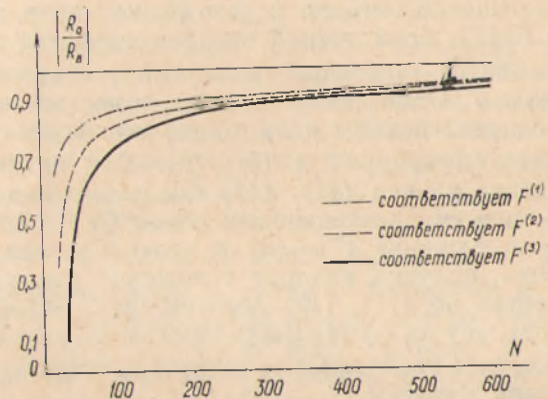


Рис. 2. Графики зависимости отношения (R_0/R_n) от числа N равноотстоящих точечных масс (для случая $q=2$ и воспроизводящих ядер, определяющих функции $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$).

ризовать такой факт нельзя, и наша задача — обеспечить (11) и в случае заданного неравномерного размещения точек.

Если в (12) положить вместо $\Delta\psi$ минимальное угловое расстояние $\Delta\psi_{\min}$ (из всех возможных) между ближайшими точечными массами, то с учетом свойств функций F_{ij}^q заключаем, что мы тем самым достигнем выполнения (11) и найдем при этом некоторое $R_1 = R_0(\Delta\psi_{\min})$, в соответствии с которым и следует располагать точки. Однако согласно условию (12) точечные массы фактически могут лежать в сферическом слое (R_1 – R_2), где $R_2 = R_0(\Delta\psi_{\max})$ аналогично может быть найдено из (12) для максимального $\Delta\psi_{\max}$ сферического расстояния между близлежащими точками. Поэтому естественно отказаться от предельного случая $R_0 = R_1$ и подобрать R_0 из других соображений. Для этого необходим предварительный анализ всех сферических расстояний $\psi_{ij} = \Delta\psi_{ij}$ между ближайшими точечными массами с целью выделения доминирующей величины из $\Delta\psi_{ij}$ и расчета по ней соответствующего радиуса R_0 .

Данную задачу можно решать в два этапа. На первом — найти некоторое среднее значение $\delta\psi$ из всех возможных сферических расстояний между ближайшими массами и, подставив в

(12) вместо $\Delta\psi$ величину $\delta\psi$, найти $R_0 = R_0(\delta\psi)$. На втором этапе — уточнить $\delta\psi$, вычислив его, например, как средневесовое

$$\overline{\delta\psi} = \frac{\sum_{i,j} |F_{ij}^q| \cdot \Delta\psi_{ij}}{\sum_{i,j} |F_{ij}^q|}, \quad (16)$$

и приняв в качестве веса функцию $F_{ij}^q(\Delta\psi_{ij})$, находимую по предварительно определенной величине $R_0(\delta\psi)$. А с помощью «нового» $\delta\psi$ вычислить из (12) соответствующее $\bar{R}_0 = R_0(\delta\psi)$. При необходимости далее возможно итерационное уточнение R_0 .

Таким образом, используя условие (12), можно гарантировать диагонально доминирующую матрицу $F = [F_{ij}^q]_{N,N}$ и, следовательно, выполнение (11) для случая неравноотстоящих точечных масс. Описанную методику, естественно, можно развить и для размещения точечных масс не обязательно на некоторой сфере, а на разных глубинах. Основная идея при построении соответствующего алгоритма в рамках метода регуляризации — это использование (12), но уже в виде зависимости h_{ij} от $\Delta\psi_{ij}$ для выполнения (11) и приведения матрицы F к диагонально доминирующему виду. Поскольку же каждое из h_{ij} содержит два неизвестных d_i , d_j , поэтому необходим подбор дополнительной информации для их определения. Приближенно в качестве таковой может быть использована величина \bar{R}_0 , которую находят из (16), (12), так как для большинства точек $i \in \sigma_k$ (16), (12) гарантируют $d_i \approx R_0$.

Список литературы: 1. Алексидзе М. А. Об одном представлении аномального гравитационного поля. — ДАН СССР, 1966, т. 170, № 4. 2. Бальмино Дж. Представление потенциала Земли с помощью совокупности точечных масс, находящихся внутри Земли. — В кн.: Использование искусственных спутников для геодезии / Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 3. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций / Пер. с англ. М.: ИЛ, 1952. 4. Марченко А. Н. О некоторых теоретических аспектах представления геопотенциала потенциалом системы точечных масс. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1982, № 3. 5. Нейман Ю. М. Вариационный метод физической геодезии. — М.: Недра, 1979. 6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. 7. Марченко А. Н. О построении моделей точечных масс геопотенциала вариационным методом. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1983, вып. 37. 8. Hardy R. I., Gopfert W. M. Least squares prediction of gravity anomalies, geoidal undulations, and deflections of vertical with multiquadric harmonic functions. — Geophys. Res. Lett., 1975, v. 2, No 10. 9. Krurup T. A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. — Danish Geod. Inst., Publ. No 44, Copenhagen, 1969. 10. Leigemann D. Differential Equations for the Motion of Artificial Satellites with Special Regard to Interpolation Series of Harmonic Kernel Functions. — Manuscripta geodaeica, 1979, v. 4.

Статья поступила в редколлегию 02. 12. 81