УДК 528.14/16

И. И. МОНИН

ЕДИНЫЙ АЛГОРИТМ СОСТАВЛЕНИЯ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЯХ

Уравнивание геодезических сетей с применением ЭВМ выполняют чаще всего параметрическим методом, так как применение коррелатного метода затруднено. Однако на целесообразность применения коррелатного метода уравнивания неоднократно указывалось в литературе. Его наглядность, простота, наличие контрольных вычислений и т. д. побудили некоторых ученых к составлению алгоритмов уравнивания геодезических сетей этим методом. Кроме того, уже давно геодезисты стремятся создать единый алгоритм уравнивания, пригодный для обработки любых геодезических сетей. Начало таких алгоритмов дано в книге Ю. И. Маркузе [2], в которой этот вопрос настолько разработан, что, казалось бы, предложенную методику можно с успехом применять в любых геодезических сетях. Тем не менее предлагаются новые подходы к составлению единого алгоритма уравнивания [1, 3, 4]. Названные работы интересны больше в теоретическом плане. Их практическое применение требует детального изучения.

В настоящей статье на основании исследований [1, 2, 4] предлагается единый алгоритм уравнивания геодезических сетей коррелатным методом, который позволяет использовать ЭВМ. Реализация данного предложения сопровождается конкретными формулами и численными примерами. Для ясности изложения приведенные примеры несколько идеализированы (с почти точными значениями углов и линий), а также даны простейшие реальные измерения (угла или длины линии).

Сущность данного метода состоит в следующем. Для каждого необходимого измерения (угла или длины линии) составим уравнение поправок

$$A_1 X + L_1 = V_1, \tag{1}$$

где A_1 — матрица коэффициентов, элементы которой в триангуляции (при измерении углов) вычисляются по формулам:

$$a_{12} = \frac{\rho'' \sin \alpha_{12}}{s_{12}} = \frac{\rho'' \Delta y_{12}}{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

$$b_{12} = -\frac{\rho'' \cos \alpha_{12}}{s_{12}} = -\frac{\rho'' \Delta x_{12}}{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \tag{2}$$

где α_{12} — дирекционный угол стороны S_{12} геодезической сети; Δx, Δy — приращения приближенных координат пунктов. Для длин сторон (в трилатерации) элементы матрицы A_1 определяются иначе:

$$a_{12} = -\cos \alpha_{12} = -\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}},$$

$$b_{12} = -\sin \alpha_{12} = -\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}. \tag{3}$$

X — матрица-столбец поправок в координаты определяемых пунктов в сети; L_1 — матрица-столбец свободных членов, вычисляемых в триангуляции (при измерении углов) по формуле

$$l = \Delta\alpha - \beta, \tag{4}$$

где $\Delta\alpha$ — разность приближенных дирекционных углов, определяющая измеренный угол β. В трилатерации свободный член вычисляется по формуле

$$l = S_0 - S, \tag{5}$$

где S_0 — вычисленная длина стороны по приближенным координатам, S — измеренное ее значение, V_1 — матрица-столбец поправок в измеренные углы или длины сторон.

Аналогично составим уравнение поправок для каждого избыточного измерения

$$A_2X + L_2 = V_2. \tag{6}$$

Элементы матриц A_2 и L_2 вычисляются по тем же формулам (2), (3), (4), (5); V_2 — матрица-столбец поправок.

Из матричного уравнения (1) однозначно найдем поправки в приближенные координаты

$$X = A_1^{-1}(V_1 - L_1). \tag{7}$$

Подставив это выражение в формулу (6), получим условное уравнение в матричном виде:

$$A_2 A_1^{-1}(V_1 - L_1) - V_2 + L_2 = 0, \tag{8}$$

коэффициенты которого вычисляются по приближенным данным. A_1^{-1} — обратная матрица.

Решая уравнение (8) по методу наименьших квадратов, находим коррелаты

$$K = -(AA^T)^{-1}W \tag{9}$$

и поправки

$$V = A^T K, \tag{10}$$

где A — матрица коэффициентов при поправках условного уравнения (8), W — матрица-столбец свободных членов того же условного уравнения (8).

Веса измерений не вводятся и оценка точности уравненных величин не делается, так как эти вопросы хорошо известны.

Приведем простейшие примеры вычислений для сетей триангуляции, трилатерации и линейно-угловой сети.

Триангуляция. Рассмотрим геодезический четырехугольник в форме квадрата (идеальный случай). Пусть все углы приблизительно равны 45°, а длины сторон ≈ 1, длины диагоналей $\approx \sqrt{2}$; дирекционный угол $\alpha_{12} = 0°$ (рис. 1). В этом случае уравнения поправок в углы принимают вид:

$$(1) = a_{41}\xi_4 + b_{41}\eta_4 - a_{31}\xi_3 - b_{31}\eta_3;$$
$$(2) = a_{31}\xi_3 + b_{31}\eta_3; \quad (3) = -a_{42}\xi_4 - b_{42}\eta_4;$$
$$(4) = a_{42}\xi_4 + b_{42}\eta_4 - a_{32}\xi_3 - b_{32}\eta_3;$$
$$(5) = a_{32}\xi_3 + b_{32}\eta_3 - a_{31}\xi_3 - b_{31}\eta_3 + l_5;$$
$$(6) = a_{31}\xi_3 + b_{31}\eta_3 - a_{34}\xi_3 - b_{34}\eta_3 - a_{43}\xi_4 - b_{43}\eta_4 + l_6;$$
$$(7) = a_{43}\xi_4 + b_{43}\eta_4 + a_{34}\xi_3 + b_{34}\eta_3 - a_{42}\xi_4 - b_{42}\eta_4 + l_7;$$
$$(8) = a_{42}\xi_4 + b_{42}\eta_4 - a_{41}\xi_4 - b_{41}\eta_4 + l_8.$$

В качестве необходимых измерений принимаем углы 1, 2, 3, 4. Избыточными измерениями тогда будут углы 5, 6, 7, 8.

Вычислим дирекционные углы всех линий и соответствующие коэффициенты a и b по формулам (2):

$$\alpha_{12} = 0^\circ,\ \alpha_{13} \approx 45^\circ,\ \alpha_{14} \approx 90^\circ,\ \alpha_{23} \approx 90^\circ,\ \alpha_{24} \approx 135^\circ,\ \alpha_{34} \approx 180^\circ;$$

$$a_{21} = 0,\ a_{31} = -\frac{1}{2}\rho'',\ a_{41} = -\rho'',\ a_{32} = -\rho,\ a_{42} = -0{,}5\rho,\ a_{43} = 0;$$

$$b_{12} = \rho,\ b_{31} = -0{,}5\rho,\ b_{41} = 0,\ b_{32} = 0,\ b_{42} = -0{,}5\rho,\ b_{43} = \rho.$$

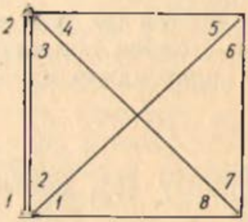

Рис. 1. Триангуляция.

Матрицы уравнений (1) и (6) легко составляются:

$$A_1 = \rho \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & -1 & -0 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 0 & -0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = \rho \begin{bmatrix} -0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\rho} = A_1^{-1}.$$

Уравнение (8) при этом принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_5 \\ l_6 \\ l_7 \\ l_8 \end{bmatrix} = 0,$$

что соответствует обычным уравнениям:

$$(2) + (3) + (4) + (5) - l_5 = 0, \quad (1) + (3) - (4) - (6) + l_6 = 0;$$

$$-(1) + (2) + (4) - (7) + l_7 = 0, \quad (1) + (2) + (3) + (8) - l_8 = 0.$$

Здесь первое и последнее уравнения — обычные условные уравнения фигур. Второе и третье уравнения — полюсные, с полюсами в точках 4 и 3. Подставляя затем l_i, значение которых надо иметь, и решая уравнения по методу наименьших квадратов, легко получить величины коррелат и поправок в углы.

Рассмотрим реальный пример. Пусть измеренные углы 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 имеют значения: 21°05′24,3″; 75°52′18,4″; 55°50′54,4″; 27°11′20,3″; 43°38′47,8″; 53°18′57,2″; 54°49′25,8″; 28°12′51,4″. Дирекционный угол $\alpha_{12}=0°$, сторона $S_{12}=10048,3$ м. По измеренным углам и стороне S_{12} вычислим длины сторон: $S_{13}=16414,0$; $S_{14}=11921,5$; $S_{23}=7913,0$; $S_{24}=9320,6$; $S_{34}=8165,9$. Вычислим дирекционные углы всех линий и соответствующие коэффициенты a и b:

$$\alpha_{13}=21°\,05'\,24,3''; \quad \alpha_{14}=49°\,18'\,15,7''; \quad \alpha_{23}=48°\,16'\,46,2'';$$

$$\alpha_{24}=104°\,7'\,41,6''; \quad \alpha_{34}=157°\,26'\,37,6'',$$

$$a_{31}=0,4521; \quad a_{41}=1,3119; \quad a_{32}=1,9398;$$

$$a_{42}=2,1457, \quad a_{34}=-0,9687;$$

$$b_{31}=1,1728; \quad b_{41}=1,1282; \quad b_{32}=1,7351;$$

$$b_{42}=-0,5396; \quad b_{34}=2,3328.$$

Матрицы A_1, A_2, A_1^{-1}, L_2 имеют при этом следующий вид:

$$\begin{bmatrix} -0,4521 & -1,1728 & 1,3119 & 1,1282 \\ 0,4521 & 1,1728 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,1457 & 0,5396 \\ -1,9398 & -1,7351 & 2,1457 & -0,5396 \end{bmatrix} = A_1;$$

$$\begin{bmatrix} 1,4877 & 0,5623 & 0 & 0 \\ 1,4208 & -1,1600 & -0,9687 & 2,3328 \\ -0,9687 & 2,3328 & -1,1770 & -1,7932 \\ 0 & 0 & 0,8338 & -1,6678 \end{bmatrix} = A_2.$$

Здесь также необходимыми измерениями являются углы 1, 2, 3, 4; а избыточными — 5, 6, 7, 8.

$$A_1^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1,1641 & -0,7868 & -0,7868 \\ 0 & 1,3014 & 0,3033 & 0,3033 \\ 0,1725 & 0,1725 & -0,3606 & 0 \\ 0,6858 & 0,6858 & 0,4193 & 0 \end{bmatrix}; \quad L_2=\begin{bmatrix} 1,6 \\ -1,1 \\ -1,2 \\ 0,1 \end{bmatrix}.$$

Подставив эти матрицы в уравнение (8) и преобразуя его, получим коэффициенты уравнения (8):

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1,4327 & -1,7309 & -0,1423 & -1,4697 & 0 & -1 & 0 \\ -1,4327 & 2,7308 & 1,1422 & 1,4697 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$W=\begin{bmatrix} 1,6 \\ -1,1 \\ -1,2 \\ 0,1 \end{bmatrix}.$$

После чего коррелаты найдем по формуле (9):

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}6185 & 0{,}0660 & -0{,}1575 & 0{,}2059 \\ 0{,}0660 & -0{,}5249 & -0{,}3495 & -0{,}1884 \\ -0{,}1575 & -0{,}3495 & -0{,}3794 & -0{,}1142 \\ 0{,}2059 & -0{,}1884 & -0{,}1142 & -0{,}4019 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1{,}6 \\ -1{,}1 \\ -1{,}2 \\ 0{,}1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}8526 \\ 1{,}0836 \\ 0{,}5764 \\ 0{,}6334 \end{bmatrix}.$$

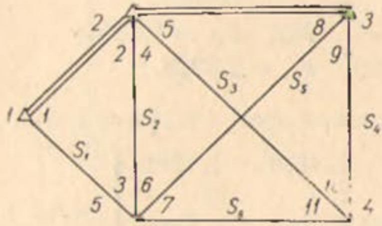

Рис. 2. Трилатерация.

Поправки в углы (i) вычислим по формуле (10):

$(1)=0{,}0932''$ $(3)=0{,}7234''$ $(5)=0{,}8526''$ $(7)=-0{,}5764''$,

$(2)=-0{,}0824$ $(4)=0{,}1071$ $(6)=-1{,}0836$ $(8)=-0{,}6334$.

Внося в измеренные углы эти поправки, можно убедиться, что во всех треугольниках сумма уравненных углов равняется 180° и все условные уравнения удовлетворяются.

Трилатерация. Рассмотрим сеть трилатерации (идеальный случай). Пусть измеренные длины сторон $S_2=S_4=S_6=S_{23}\approx 1$; $S_3=S_5\approx\sqrt{2}$; $S_1=S_{12}\approx 0{,}5\sqrt{2}$ (рис. 2). Дирекционный угол $\alpha_{12}=0°$. Напишем уравнения поправок для измеренных линий:

$$(s_1)=a_{51}\varepsilon_5+b_{51}\eta_5;\quad (s_2)=a_{52}\varepsilon_5+b_{52}\eta_5;\quad (s_3)=a_{42}\varepsilon_4+b_{42}\eta_4;$$

$$(s_4)=a_{43}\varepsilon_4+b_{43}\eta_4;\quad (s_5)=a_{53}\varepsilon_5+b_{53}\eta_5+l_5;$$

$$(s_6)=a_{54}\varepsilon_5+b_{54}\eta_5+a_{45}\varepsilon_4+b_{45}\eta_4+l_6,$$

где S_1, S_2, S_3, S_4 — необходимые измерения, а S_5, S_6 — избыточные измерения. Далее по измеренным сторонам, пользуясь теоремой косинусов, вычисляем углы в треугольниках, дирекционные углы линий и коэффициенты a и b по формулам (3). Приводим результаты вычислений:

$$\alpha_{51}=270°,\quad \alpha_{52}=315°,\quad \alpha_{42}=270°,\quad \alpha_{43}=315°,$$

$$\alpha_{53}=0°,\quad \alpha_{54}=45°,$$

$$a_{51}=0,\quad a_{52}=-1:\sqrt{2},\quad a_{42}=0,\quad a_{43}=-1:\sqrt{2},$$

$$a_{53}=-1,\quad a_{54}=-1:\sqrt{2},$$

$$b_{51}=1,\quad b_{52}=1:\sqrt{2},\quad b_{42}=1,\quad b_{43}=1:\sqrt{2},$$
$$b_{53}=0,\quad b_{54}=-1:\sqrt{2}.$$

Матрицы A_1, A_2, A_1^{-1} при этом получаются:

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1:\sqrt{2} & 1:\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1:\sqrt{2} & 1:\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1:\sqrt{2} & 1:\sqrt{2} & -1:\sqrt{2} & -1:\sqrt{2} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=A_1^{-1}.$$

Подставив их в формулу (8), получим условное уравнение:

$$\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} (s_1) \\ (s_2) \\ (s_3) \\ (s_4) \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} (s_5) \\ (s_6) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} l_5 \\ l_6 \end{bmatrix}=0,$$

или в обычном виде систему условных уравнений,

$$-(s_1)+\sqrt{2}(s_2)-(s_5)+l_5=0;$$

$$-\sqrt{2}(s_1)+(s_2)+\sqrt{2}(s_3)-(s_4)-(s_6)+l_6=0,$$

которые получаются также из геометрического условия суммы углов при точке 2.

Теперь рассмотрим реальные измерения (рис. 2). Измеренные стороны: $S_{23}=12696{,}90$ м; $S_1=9663{,}35$ м; $S_2=11248{,}50$ м; $S_3=16254{,}90$ м; $S_4=11742{,}60$ м; $S_5=16476{,}90$ м; $S_6=10691{,}30$ м; $S_{12}=13474{,}80$ м. Дирекционный угол $\alpha_{23}=71°10'23{,}5''$.

Найдем значения углов в треугольниках:

$1=55°15'18{,}01''$	$5=45°50'53{,}61''$	$9=40°18'42{,}57''$
$2=44°54'08{,}97''$	$6=50°17'40{,}66''$	$10=50°52'22{,}57''$
$3=79°50'33{,}02''$	$7=45°16'50{,}63''$	$11=43°32'04{,}23''$.
$4=40°53'24{,}48''$	$8=42°58'01{,}25''$	

Вычислим дирекционные углы линий и коэффициенты a и b:

$\alpha_{24}=117°1'17{,}11''$	$\alpha_{15}=78°04'08{,}57''$	$a_{24}=0{,}45432$	$a_{35}=0{,}88125$
$\alpha_{25}=157°54'41{,}59''$	$\alpha_{35}=208°12'22{,}25''$	$a_{25}=0{,}92661$	$a_{54}=-0{,}28423$
$\alpha_{21}=202°48'50{,}56''$	$\alpha_{54}=73°29'12{,}88''$	$a_{15}=-0{,}20673$	$b_{24}=-0{,}89084$
$b_{25}=-0{,}37603$	$b_{15}=-0{,}97839$	$b_{35}=0{,}47264$	$b_{54}=-0{,}95875$.

Составим матрицы A_1, A_2, A_1^{-1}, L_2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}20673 & 0{,}97839 \\ 0 & 0 & -0{,}92661 & 0{,}37603 \\ -0{,}45432 & 0{,}89084 & 0 & 0 \\ -0{,}97776 & 0{,}20971 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_1;$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0{,}88125 & -0{,}47264 \\ 0{,}28423 & 0{,}95875 & -0{,}28423 & -0{,}95875 \end{bmatrix} = A_2;$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}27033 & -1{,}14836 \\ 0 & 0 & 1{,}26040 & -0{,}58565 \\ 0{,}38201 & -0{,}99397 & 0 & 0 \\ 0{,}94137 & 0{,}21002 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_1^{-1}; \begin{bmatrix} -0{,}01 \\ 0{,}00 \end{bmatrix} = L_2;$$

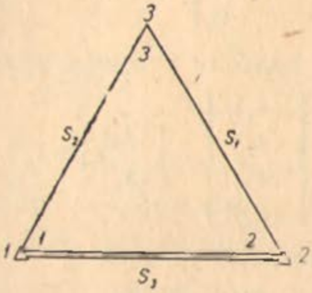

Рис. 3. Линейно-угловая сеть.

Подставляем эти матрицы в уравнение (8). Матрица A получается такой:

$$\begin{bmatrix} -0{,}781574 & 0{,}776673 & 0, & 0, & -1 & 0 \\ -1{,}011116 & 0{,}081159 & 1{,}252430 & -0{,}887889 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A:$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}48827 & -0{,}09500 \\ -0{,}09500 & 0{,}24649 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0{,}01 \\ 0{,}00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}00488 \\ 0{,}00095 \end{bmatrix}.$$

Подставив эти значения в формулу (10), найдем

$$(S_1) = 0{,}00285 \text{ м} \qquad (S_3) = 0{,}00122 \text{ м} \qquad (S_5) = 0{,}00488 \text{ м}$$
$$(S_2) = -0{,}00371 \text{ м} \qquad (S_4) = -0{,}00084 \text{ м} \qquad (S_6) = -0{,}00095 \text{ м}.$$

Если эти значения подставим в условные уравнения, то заметим, что все условия выполняются, то есть решение верно.

Линейно-угловая сеть. Рассмотрим треугольник с измеренными углами и сторонами (рис. 3). Пусть углы 1, 2, 3 приблизительно равны 60°, а длины сторон $S_1 = S_2 = S_3 \approx 1$. Дирекционный угол $\alpha_{12} = 0°$. Уравнения поправок в этом случае для сторон и углов принимают вид:

$$(S_1) = a_{32}\varepsilon_3 + b_{32}\eta_3, \quad (S_2) = a_{31}\varepsilon_3 + b_{31}\eta_3,$$
$$(1) = -a_{31}\varepsilon_3 - b_{31}\eta_3 + l_1,$$
$$(2) = a_{32}\varepsilon_3 + b_{32}\eta_3 + l_2,$$
$$(3) = a_{31}\varepsilon_3 + b_{31}\eta_3 - a_{32}\varepsilon_3 - b_{32}\eta_3 + l_3,$$

где (S_1), (S_2) — поправки в необходимые измерения; (1), (2), (3) — поправки в избыточные углы. Вычислим дирекционные углы линий и коэффициенты a и b по формулам (2), (3):

$$\alpha_{13} = 30°, \quad \alpha_{12} = 90°, \quad \alpha_{32} = 150°, \quad a_{31} = \sqrt{3}:2,$$
$$b_{31} = 0{,}5; \quad a'_{31} = -0{,}5,$$
$$b'_{31} = \sqrt{3}:2, \quad a_{32} = \sqrt{3}:2, \quad b_{32} = -0{,}5, \quad a'_{32} = 0{,}5, \quad b'_{22} = \sqrt{3}:2.$$

Матрицы A_1, A_2, A_1^{-1} легко составляются:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}:2 & -0{,}5 \\ \sqrt{3}:2 & 0{,}5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -\sqrt{3}:2 \\ 0{,}5 & \sqrt{3}:2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1:\sqrt{3} & 1:\sqrt{3} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Подставив их в уравнение (8) и преобразовав его, найдем

$$\begin{bmatrix} 2:\sqrt{3} & -1:\sqrt{3} & -1 & 0 & 0 \\ -1:\sqrt{3} & 2:\sqrt{3} & 0 & -1 & 0 \\ -1:\sqrt{3} & -1:\sqrt{3} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A.$$

Подставив эту матрицу в формулу (9), получим коррелаты, а по формуле (10) — поправки. Матричное уравнение (8) в этом случае дает условные уравнения, которые можно получить, образовав равенство измеренного угла плюс поправка к нему и вычисленного по длинам сторон угла плюс поправка к нему, найденная по поправкам в стороны треугольника.

Рассмотрим теперь реальные измерения (рис. 3). Пусть измеренные углы 1, 2, 3 получились 65°41′7″, 65°42′40″, 48°36′16″, а стороны S_1, S_2, S_3 — 24972,70 м; 24977,79 м и 20557,11 м. Дирекционный угол $\alpha_{12} = 180°$. Вычислим по теореме косинусов углы 1, 2, 3, используя измеренные стороны: 65°41′5,46″; 65°42′38,54″; 48°36′16,00″.

Ищем дирекционные углы и коэффициенты a и b:

$$\alpha_{23} = 245°\,42'\,38{,}54''; \quad a_{32} = 0{,}411344; \quad a_{31} = -0{,}411755;$$
$$\alpha_{31} = 294°\,18'\,54{,}54''; \quad b_{32} = 0{,}911470; \quad b_{31} = 0{,}911294;$$
$$a'_{32} = 0{,}752822; \quad b'_{32} = 0{,}339570;$$
$$a'_{31} = 0{,}752268; \quad b'_{31} = -0{,}339902.$$

Матрицы A_1, A_2, A_1^{-1}, L_2 при этом принимают вид:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0{,}411344 & 0{,}911470 \\ -0{,}411755 & 0{,}911294 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0{,}752268 & 0{,}339902 \\ 0{,}752822 & 0{,}339570 \\ -0{,}000554 & -0{,}679472 \end{bmatrix};$$

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}214802 & -1{,}215037 \\ 0{,}548891 & 0{,}548343 \end{bmatrix}; \quad L_2 = \begin{bmatrix} -1{,}54'' \\ -1{,}46 \\ 0{,}00 \end{bmatrix}.$$

Подставляя эти матрицы в уравнение (8), после его преобразований получим матрицу A:

$$\begin{bmatrix} -0{,}727287 & 1{,}100415 & -1 & 0 & 0 \\ 1{,}100915 & -0{,}728506 & 0 & -1 & 0 \\ -0{,}373629 & -0{,}371910 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A.$$

По формуле (9) находим коррелаты, а по формуле (10) — поправки:

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}566308 & -0{,}335852 & -0{,}097839 \\ -0{,}335852 & -0{,}565840 & -0{,}098306 \\ -0{,}097839 & -0{,}098306 & -0{,}803853 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -1{,}54 \\ -1{,}46 \\ 0{,}00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}362 \\ 1{,}343 \\ 0{,}294 \end{bmatrix};$$

$(S_1) = 0{,}378$ дм; $(S_2) = 0{,}411$ дм; $(1) = -1{,}362''$; $(2) = -1{,}343$; $(3) = -0{,}294$.

Для контроля можно подставить значения поправок в условные уравнения и убедиться, что они удовлетворяются. Сумма исправленных углов в треугольнике будет $180°00'00{,}001''$. Отметим, что здесь в качестве необходимых измерений приняты длины линий S_1, S_2. Избыточными измерениями считаются углы 1, 2, 3. Составляя уравнения поправок для углов, длины сторон выражаем в дециметрах, а поправки в углы — в секундах. При этом порядок коэффициентов a и b будет один и тот же как в уравнениях для углов, так и в уравнениях поправок для сторон. Веса измерений для углов и сторон приняты следующие:

$$P_1 = P_2 = P_3 = 1; \quad P_{S_1} = P_{S_2} = (1'' : 1 \text{ дм})^2.$$

Список литературы: 1. *Герасименко М. Д.* Единый алгоритм составления условных уравнений и его применение для уравнивания и оценки точности геодезических построений. — Тр. НИИГАиК, т. 34, 1975. 2. *Маркузе Ю. И.* Алгоритм уравнивания комбинированных геодезических сетей. — М.: Недра, 1972. 3. *Химов З. С.* Уравнивание геодезических сетей с использованием единого алгоритма. Проблемы математической обработки геодезических сетей. — Материалы всесоюзной конференции. Новосибирск, 1979. 4. *Юршанский З. М.* Некоторые вопросы расширения многообразия и унификации алгоритмов уравнительных вычислений в связи с применением ЭВМ. Проблемы математической обработки геодезических сетей. — Материалы всесоюзной конференции. Новосибирск, 1979.

Статья поступила в редколлегию 3. 06. 80