УДК 528.3.535.30

Д. И. МАСЛИЧ, Л. С. ХИЖАК, И. И. ДИДУХ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СВЕТОВОЙ КРИВОЙ НАД РАВНИННОЙ ОДНОРОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ

В работе [1] приводится общая теория определения уравнени световой кривой с учетом уравнений динамики атмосферы. В [2 дано решение этой задачи для случая однородной равнинной под стилающей поверхности в периоды, когда притоком тепла може пренебречь и коэффициент температуропроводности является ве личиной постоянной. Решение указанной задачи в последней ра боте отыскивается в виде ряда Тейлора, причем теоретически исследования определения области сходимости здесь не рассмат риваются.

Установлено, что такой ряд для небольших значений $|x|$ схо дится. Поэтому уравнение световой кривой для таких расстояни может быть определено с соответствующей точностью.

В настоящей статье рассмотрен вопрос об определении урав нения световой кривой для любых расстояний над равнинной од нородной подстилающей поверхностью в турбулентной атмосфере т. е. когда коэффициент турбулентности является линейной функ цией высоты при отсутствии притока тепла. Будем предполагать что

$$a(z) = a_1 z + a_2. \tag{1}$$

Для нашего случая система уравнений (1) в работе [1] пере пишется в виде:

$$\frac{d}{dz}\left[(a_1 z + a_2)\frac{dT}{dz}\right] = 0, \qquad \rho g - \frac{dP}{dz} = 0, \tag{2}$$

где a_1, a_2 — некоторые коэффициенты; T, P, ρ и g — соответствен но температура, давление и плотность воздуха и ускорение сво бодного падения.

Решение системы (1) для граничных условий $T/_{x=0}=T_0$; $T'/_{x=0}=T'_0$; $P/_{x=0}=P_0$ получим в виде:

$$T(z) = \frac{T_0'}{\beta}\ln|\beta z + 1| + T_0, \qquad \rho = \frac{\mu P_0}{RT} e^{\frac{\mu g}{R}\int\frac{dz}{T(z)}}, \tag{3}$$

где $\beta = \frac{a_1}{a_2}$, μ — масса моля, R — газовая постоянная.

Разложим интеграл в ряд Маклорена. С учетом условий (3) получим

$$F_0 = \int\frac{dz}{T(z)} = \left\{z - \frac{T_0'}{T_0}\frac{z^2}{2} + \frac{T_0'}{T_0}\left(\beta + \frac{2T_0'}{T_0}\right)\frac{z^3}{6} - \frac{T_0'}{T_0}\left[\beta^2 + \frac{3\beta T_0'}{T_0} + 3\left(\frac{T_0'}{T}\right)^2\right]\frac{z^4}{12} + \left[3\beta^3 + \frac{11\beta^2 T_0'}{T_0} + 18\beta\left(\frac{T_0'}{T_0}\right)^2 + 12\left(\frac{T_0'}{T_0}\right)^3\right]\frac{T_0'}{T_0}\frac{z_0^5}{60} + \ldots\right\}\frac{\mu g}{RT_0}. \tag{4}$$

С учетом (4) выражение для плотности воздуха ρ запишется в виде

$$\rho = \frac{\mu P_0}{RT_0} e^{\frac{\mu g}{R}F_0}. \tag{5}$$

Учитывая формулу Даля—Гладстона, получим для показателя преломления воздуха n

$$n = 1 + \alpha\frac{\mu P_0}{RT} e^{\frac{\mu g}{R}F_0}. \tag{6}$$

Как известно, уравнение световой кривой должно удовлетворить уравнениям Эйлера, принимающим для плоского случая вид

$$nz'' = n'_z(1 + z'^2), \tag{7}$$

где n'_z — производная от n по z, которая может быть получена дифференцированием (6) с учетом, что z есть функция от x.

В общем случае получить решение уравнения (7) при граничных условиях $z/_{x=0}=z_0$ и $z'/_{x=0}=\operatorname{ctg}\zeta$, где ζ угол между касательной к световой кривой в точке $x=0$ и осью z в системе координат xoz, не представляется возможным. Поэтому решение будем искать в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $x=x_0$. Тогда это решение может быть представлено в виде

$$z(x) = z_0 + \frac{z_0'(x-x_0)}{1!} + \frac{z_0''(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{z_0^{(m)}(x-x_0)^m}{m!} + \cdots. \tag{8}$$

Здесь:

$$z_0' = \operatorname{ctg}\zeta,$$

$$z_0'' = \frac{n_0'}{n_0}(1 + z_0'^2),$$

$$z_0''' = \left(\frac{n_0''}{n_0'} + \frac{n_0'}{n_0}\right)z_0' z_0'', \tag{9}$$

$$z_0^{IV} = \left(\frac{n_0'''}{n_0'} + \frac{3n_0''}{n_0}\right)z_0'^2 z_0'' + \left(\frac{n_0''}{n_0} + \frac{n_0'}{n_0}\right)z_0''^2,$$

$$z_0^{V} = \left(\frac{n_0^{IV}}{n_0'} + \frac{4n_0'''}{n_0} + \frac{3n_0''^2}{n_0 n_0'}\right)z_0'^3 z_0'' + \left(\frac{3n_0'''}{n_0'} + \frac{n_0''^2}{n_0'^2} + \frac{11n_0'}{n_0} + \frac{n_0'^2}{n_0^2}\right)z_0' z_0''^2,$$

. . . .

Остальные необходимые производные можно получить путем дифференцирования уравнения (2) по x, учитывая, что n является функцией z, а z — функцией x при $z=0$.

Производные $n_0^{(m)}$, полученные путем дифференцирования уравнения (6) по z при $z=0$, запишутся в виде:

$$n_0 = 1 + D_0,$$
$$n'_0 = A_{10} D_0,$$
$$n''_0 = n'_0 (A_{20} + \beta E_0 V_0),$$
$$n_0''' = n_0' (A_{20} + A_{30} + 2 (A_{10} + A_{20}) E_0 v_0 \beta - 2E_0 v_0^2 \beta^2), \qquad (10)$$
$$n_0^{IV} = n_0' (A_{20} + A_{30} A_{40} + 2 (3A_{20}^2 + 2A_{10} A_{30}) E_0 v_0 \beta -$$
$$- 2 (4A_{20} + 3A_{30}) E_0 v_0^2 \beta^2 + 6E_0 v_0^3 \beta^3);$$

. . . .

Здесь введены такие обозначения:

$$D_0 = A_{00} e^{F_0},$$
$$F_0 = \frac{B}{T_0}\left[z_0 - \frac{Lz_0^2}{2} + L(v_0\beta + 2L)\frac{z_0^3}{6} - L(v_0^2\beta^2 + 3\beta v_0 L + 3L^2)\frac{z_0^4}{12} + \right.$$
$$\left. + (3v_0^3\beta^3 + 11 v_0^2\beta^2 L + 18 v_0 \beta L^2 + 12 L^3)\frac{Lz_0^5}{60} + \cdots\right],$$
$$B = \frac{\mu g}{R};\; L = \frac{T_0'}{T_0};\; A_{00} = \frac{\alpha\mu P_0}{RT_0};\; E_0 = \frac{s_0 v_0}{A_{10}}, \qquad (11)$$
$$A_{n0} = \frac{B - nT_0'}{T_0}\; (n = 1, 2, \ldots);\; v_0 = 1;\; s_0 = \frac{T_0'}{T_0}.$$

Формула (8) дает хорошее приближение z при x достаточно малом. Если же $|x| \leqslant 100$, то члены ряда убывают со скоростью порядка 10^{-n}. Если же x большие, тогда воспользуемся методом, рассмотренным в [3]. Согласно этому методу, уравнение (8) примет вид

$$z(x) = z_k + \frac{z_k'(x - x_k)}{1!} + \frac{z_k''(x - x_k)^2}{2!} +$$
$$+ \cdots + \frac{z_k^{(m)}(x - x_k)^{(m)}}{m!} + \cdots, \qquad (12)$$

где $k = 1, 2 \ldots$

Значение z_k будет вычисляться по формуле

$$z_k = z_{k-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_{k-1}^{(i)}(x_k - x_{k-1})^i}{i!}, \qquad (13)$$

и значение $z_k^{(i)}$ можно получить по формулам (9—11), заменив в них индекс «0» индексом «k» за исключением формулы

$$v_k = \frac{T_k'}{T_0'};\; L = \frac{T_0'}{T_0} \text{ и } A_{0k} = \frac{c\mu P_0}{RT_k}. \qquad (14)$$

Полученные формулы (12)—(14) могут быть использованы для представления световой кривой при больших расстояниях x в равнинной местности.

Если световая энергия распространяется в свободной атмосфере, т. е. при малых зенитных расстояниях, где z могут быть достаточно большими, для решения второго уравнения системы (2) воспользуемся методикой, изложенной в [3], с учетом которой для ρ получим:

$$\rho = \frac{\mu P_k}{RT} e^{\frac{B}{T_k} F_k(z)}, \qquad (15)$$

$$F_k(z) = (z - z_k) - \frac{s_k(z - z_k)^2}{2} + \frac{s_k(v_k\beta + 2s_k)}{6}(z - z_k)^3 -$$
$$- \frac{s_k(v_k^2\beta^2 + 3s_k v_k \beta + 3s_k^2}{12}(z - z_k)^4 + s_k(v_k^3\beta^3 + 11 s_k v_k^2 \beta^2 +$$
$$+ 18 s_k^2 v_k \beta + 12 s_k^4)\frac{(z - z_k)^5}{60} - s_k(12 v_k^4 \beta^4 + 50 s_k v_k^3 \beta^3 +$$
$$+ 105 s_k^2 v_k^2 \beta^2 + 120 s_k^3 v_k \beta + 60 s_k^4)\frac{(z - z_k)^5}{360} + \cdots, \qquad (16)$$

где $P(z) = P_{k-1} e^{\frac{\mu g}{RT_{k-1}}} F_{k-1}(z);$

$$P_k = P(z_k);\quad s_k = \frac{T_k'}{T_k}. \qquad (17)$$

Таким образом, мы получили метод аппроксимации уравнения световой кривой рядом Тейлора для любых расстояний и любых высот визирных целей над равнинной однородной подстилающей поверхностью.

Список литературы: 1. *Маслич Д. И., Хижак Л. С., Дидух И. И.* и др. Определение уравнений световой кривой и углов рефракции в атмосфере. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1980, вып. 32. 2. *Маслич Д. И., Хижак Л. С., Дидух И. И.* и др. Определение вертикальной рефракции над равнинной однородной поверхностью в инверсионный период. — В. кн.: V Всесоюзн. симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере (Тез. докл.), ч. 2. Томск, 1979. 3. *Хижак Л. С., Маслич Д. И., Дидух И. И.* Приближенный метод нахождения уравнений световой кривой при определении рефракции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1981, вып. 34.

Статья поступила в редколлегию 24. 12. 81