

СПОСОБЫ ПРИВЯЗКИ К ПУНКТАМ НАСТЕННОЙ ПОЛИГОНОМЕТРИИ С ВЕРТИКАЛЬНЫМИ БАЗИСАМИ

Применение стационарных вертикальных базисов в настенной полигонометрии существенно расширяет ее потенциальные возможности. При наличии таких базисов отпадает необходимость в линейных измерениях в процессе привязок, возрастает маневренность при выборе привязочных станций, нейтрализуется влияние погрешностей измерения базисов и т. д. Однако вследствие различных причин условия для геометрической связи пунктов настенной полигонометрии с вертикальными базисами со временем могут изменяться. Это влечет за собой соответствующее изменение и методики обработки измерений.

В настоящей статье рассмотрены возможные варианты привязки к пунктам настенной полигонометрии с вертикальными базисами и способы их обработки.

Привязка при наличии двух вертикальных базисов. В этом случае для геометрической связи с опорными пунктами из выбранной точки необходимо измерить горизонтальный угол β между направлениями на верхние марки базисов и углы наклона v на верхние и нижние марки (рис. 1).

Строгое уравнивание привязки для рассматриваемого случая начинают с вычисления предварительных значений расстояний s_A' и s_B' :

$$\left. \begin{aligned} s'_A &= \frac{l_A}{\operatorname{tg} v''_A - \operatorname{tg} v'_A} = \frac{l_A}{t_A}; \\ s'_B &= \frac{l_B}{\operatorname{tg} v''_B - \operatorname{tg} v'_B} = \frac{l_B}{t_B}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Далее определяют квадрат расстояния между верхними марками базисов

$$(b')^2 = (s'_A)^2 + (s'_B)^2 - 2s'_A s'_B \cos \beta'. \quad (2)$$

Если $(b')^2$ удовлетворяет условию

$$\frac{b' - b}{b} = \frac{(b')^2 - b^2}{2b^2} = \frac{\sigma}{2b^2} \leqslant \frac{1}{T}, \quad (3)$$

где $1 : T$ — необходимая точность привязки, то измерения считаются удовлетворительными и их уравнивают по способу наименьших квадратов. При этом поправки v_β , v_{v_A} и v_{v_B} в измеренные углы находят из решения условного уравнения

$$v_{\beta} \sin \beta' - \left(\frac{1}{t_A} + t_A \right) \left(\frac{s'_A}{s'_B} - \cos \beta' \right) v_{v_A} - \left(\frac{1}{t_B} + t_B \right) \times \\ \times \left(\frac{s'_B}{s'_A} - \cos \beta' \right) v_{v_B} + \frac{\sigma \cdot \rho''}{2s'_A s'_B} = a_{\beta} v_{\beta} + a_{v_A} v_{v_A} + a_{v_B} v_{v_B} + w = 0, \quad (4)$$

а поправки v_{s_A} и v_{s_B} к предварительным расстояниям вычисляют по формулам

$$v_{s_A} = - \left(\frac{1}{t_A} + t_A \right) \frac{s'_A v_{v_A}}{\rho}; \quad v_{s_B} = - \left(\frac{1}{t_B} + t_B \right) \frac{s'_B v_{v_B}}{\rho}. \quad (5)$$

В заключение по исправленным расстояниям s_A , s_B и углу β вычисляют значения прымых углов ϕ и ψ :

$$\sin \phi = \frac{\sin \beta}{b} s_A; \quad \sin \psi = \frac{\sin \beta}{b} s_B. \quad (6)$$

Уравнивание привязки контролируют по равенству

$$\phi + \psi + \beta - 180^\circ = 0. \quad (7)$$

При необходимости можно вычислить также и координаты привязываемой точки.

Строгий способ уравнивания следует применять в случаях привязки полигонометрических ходов. Для теодолитных ходов и одиночных точек, используемых в процессе выполнения съемочных и разбивочных работ, рекомендуется упрощенный способ обработки измерений. В этом случае после вычисления предварительных расстояний s_A' и s_B' по формулам (6) сразу же вычисляют предварительные значения прымых углов ϕ' и ψ' , после чего определяют невязку f_{β} в треугольнике и поправки в углы ϕ' , ψ' и в расстояния s_A' , s_B' :

$$\left. \begin{aligned} f_{\beta} &= \beta + \phi' + \psi' - 180^\circ; \quad v_{\phi} = v_{\psi} = v = -f_{\beta}: 2; \\ v_{s_A} &= \frac{b \cdot v'' \cdot \cos \phi}{\rho'' \sin \beta}; \quad v_{s_B} = \frac{b \cdot v'' \cdot \cos \psi}{\rho'' \sin \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Привязку при упрощенном способе уравнивания можно считать удовлетворительной, если выполняется условие

$$\frac{|v_{s_A} + v_{s_B}|}{s_A + s_B} \leqslant \frac{1}{T}. \quad (9)$$

При $s_A \approx s_B$ и $v_A \approx v_B$ результаты, получаемые при строгом и упрощенном способах, практически совпадают.

Оценка точности результатов при строгом уравнивании привязки производится по известной формуле

$$m_i = m_v \cdot p_t^{-0.5}. \quad (10)$$

Рабочие формулы для оценки точности основных элементов геометрической связи, полученные на основании формулы (10), имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m_s &= v_s \sqrt{\left(\frac{m_v}{v_s}\right)^2 - 1}; \quad m_\beta = \sqrt{(m_\beta')^2 - v_\beta^2}; \\ m_\varphi &= \operatorname{tg} \varphi \sqrt{(m_\beta \operatorname{ctg} \beta)^2 + \left(\frac{\rho}{s_A} m_{s_A}\right)^2}; \\ m_\psi &= \operatorname{tg} \psi \sqrt{(m_\beta \operatorname{ctg} \beta)^2 + \left(\frac{\rho}{s_B} m_{s_B}\right)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где m_β' — средняя квадратическая погрешность измерения угла β .

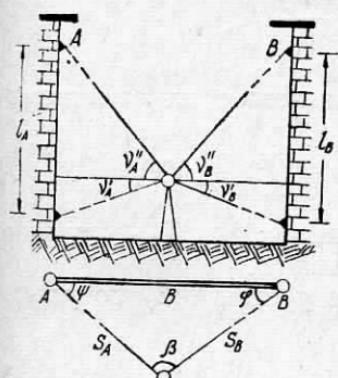


Рис. 1. Схема привязки к двум вертикальным базисам.

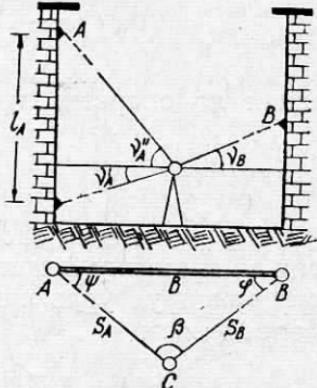


Рис. 2. Схема привязки к одному вертикальному базису и одиночному пункту.

Из формул (11) следует, что углы φ и ψ будут определяться тем точнее, чем ближе к линии, соединяющей опорные точки A и B , будет расположена станция C . В то же время располагать станцию очень близко к одной из опорных точек не рекомендуется. Наибольшая точность привязки будет обеспечиваться при положении станции C посередине линий, соединяющей опорные точки A и B .

Среднюю квадратическую погрешность определения положения точки C можно подсчитать по формуле

$$m_C = \frac{m_v \cdot s}{\rho} \sqrt{2 + \left(\frac{s}{l}\right)^2}, \quad (12)$$

где s — среднее расстояние до опорных точек; l — средняя длина вертикальных базисов.

Привязка при наличии одного вертикального базиса и одиночного пункта. При утрате одной из нижних марок у пары

вертикальных базисов, закрытии видимости на нее или наличия вместо второго базиса только одиночного грунтового или настенного пункта (рис. 2) строгую обработку привязки начинают с вычисления предварительных значений искомых величин: расстояния до пункта, у которого сохранился вертикальный базис; примычного угла, лежащего против этого расстояния; расстояния до одиночного пункта. При этом последовательно используют формулы

$$\left. \begin{aligned} s'_A &= \frac{l_A}{\operatorname{tg} v''_A - \operatorname{tg} v'_A} = \frac{l_A}{t_A}; \\ \sin \varphi' &= \frac{\sin \beta}{b} s'_A; \\ s'_B &= \frac{b + s'_A \cos(\beta + \varphi')}{\cos \varphi'} . \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Расстояния до опорных пунктов связаны с их отметками условием

$$s_B \operatorname{tg} v_B - s_A \operatorname{tg} v'_A + (f_B - f_A) - (H_B - H_A) = 0, \quad (14)$$

где H_A и H_B — отметки опорных пунктов; f_A и f_B — суммарные поправки за кривизну Земли и рефракцию.

Дифференцируя уравнение (14) с учетом (13) по углам наклона, определяем

$$\begin{aligned} &- \frac{s_A}{\rho \cdot t_A \cdot \cos^2 v''_A} \left(\frac{\operatorname{tg} v_B \cos(\beta + \varphi')}{\cos \varphi'} - \operatorname{tg} v'_A \right) v_{v''_A} + \\ &+ \frac{s_A}{\rho t_A} \left(\frac{\operatorname{tg} v_B \cos(\beta + \varphi')}{\cos \varphi'} - \operatorname{tg} v''_A \right) v_{v'_A} + \frac{s_B v_{v_B}}{\rho \cos v_B} + \\ &+ (s'_B \operatorname{tg} v_B - s'_A \operatorname{tg} v'_A) + (f_B - f_A) - (H_B - H_A) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Решая далее уравнение (15) при условии $[v^2] = \min$, находим поправки в углы наклона v , а затем и поправки в расстояния s_A' и s_B' :

$$v_{s_A} = - \frac{s_A}{\rho \cdot t_A} \left(\frac{v_{v''_A}}{\cos^2 v''_A} - v_{v'_A} \right); \quad v_{s_B} = \frac{\cos(\beta + \varphi')}{\cos \varphi'} v_{s_A}. \quad (16)$$

При $\beta > 130^\circ$, $v_A < 1^\circ$ и $v_{v''_A} < 10^\circ$ условное уравнение (15) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{s_A \operatorname{tg} v_B}{\rho \cdot t_A} v_{v''_A} &= \frac{s_A}{\rho} \left(\frac{\operatorname{tg} v_B}{t_A} + 1 \right) v_{v'_A} + \frac{s_B}{\rho} v_{v_B} + w = \\ &= a_{v''_A} v_{v''_A} + a_{v'_A} v_{v'_A} + a_{v_B} v_{v_B} + w = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

а поправки в расстояния s_A' и s_B' вычислить по формуле

$$v_{sA} = -v_{sB} = \frac{s_A}{\rho t_A} (v_{\nu A''} - v_{\nu A'}). \quad (18)$$

В заключение по формулам (6) и (7) получают окончательные значения углов φ и ψ и производят контроль вычислений.

Из уравнения (14) следует, что устранение свободного члена в нем происходит в основном за счет введения противоположных по знакам поправок v_{sA} и v_{sB} в расстояния. Поэтому, дифференцируя уравнение (14) только по s_A и s_B , получаем формулы для непосредственного вычисления этих поправок:

$$\left. \begin{aligned} v_{sA} &= \frac{(H_B - H_A) - (s'_B \operatorname{tg} \nu_B - s'_A \operatorname{tg} \nu_A) - (f_B - f_A)}{\cos(\beta + \psi')} \cdot \frac{\operatorname{tg} \nu_B - \operatorname{tg} \nu_A''}{\cos \varphi'} \\ v_{sB} &= \frac{\cos(\beta + \psi')}{\cos \varphi'} v_{sA}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Исследования показали, что конечные результаты привязки при использовании формул (15)–(19), как и формул (4) и (5), практически совпадают. Это дает возможность использовать эти формулы более гибко. Например, если производится только плановая привязка точки, удобнее пользоваться непосредственно формулами (19); если же одновременно производится и плановая, и высотная привязки, следует пользоваться формулами (15)–(18). Отсюда следует также, что закрепление пунктов настенной полигонометрии можно производить не только парами вертикальных базисов, но и комбинацией, состоящей из одного вертикального базиса и одиночного пункта. Для оценки точности результатов привязки в этом случае также можно использовать формулы (11) и (12).

Привязка к двум одиночным пространственным пунктам. При утрате нижних марок у пары вертикальных базисов привязку производят только к двум верхним маркам (рис. 3). В общем виде такую задачу решают методом обратной пространственной засечки по двум пунктам, описанным в статье [1]. Однако в этом случае решение остается бесконтрольным. Для обеспечения контроля и повышения точности привязки наблюдения двух пространственных марок рекомендуется дополнить определением горизонта инструмента от ближайшего репера. Отсчет по рейке, соответствующий горизонтальному положению визирной оси трубы теодолита, находят как среднее из отсчетов по средней нити, произведенных при двух положениях вертикального круга и отсчете на нем, равном $0^{\circ}00'00''$. Такая методика точного определения горизонта инструмента теодолитом рассмотрена в работе [4].

Измерив углы ν_A , ν_B , β и определив ГИ, получим:

$$\begin{aligned} s_A &= (H_A - \text{ГИ} - f_A) \operatorname{ctg} \nu_A = h_A \operatorname{ctg} \nu_A; \\ s_B &= (H_B - \text{ГИ} - f_B) \operatorname{ctg} \nu_B = h_B \operatorname{ctg} \nu_B. \end{aligned} \quad (20)$$

Учитывая, что наблюдения по обоим направлениям производятся в одно и то же время, а визирные лучи проходят высоко от земной поверхности, коэффициенты рефракции k_A и k_B примем одинаковыми, положив

$$\frac{f_A}{f_B} = \frac{1 - k_A}{2R} s_A^2 : \frac{1 - k_B}{2R} s_B^2 = \left(\frac{s_A}{s_B} \right)^2 = C. \quad (21)$$

На основании формул (20) и (21) из рис. 3 находим

$$f_B = \frac{(H_A - \text{ГИ}) \operatorname{ctg} \nu_A \cos \psi + (H_B - \text{ГИ}) \operatorname{ctg} \nu_B \cos \varphi - b}{C \cdot \operatorname{ctg} \nu_A \cos \psi + \operatorname{ctg} \nu_B \cos \varphi}. \quad (22)$$

Значения промежуточных углов φ и ψ , входящих в равенство (22), определяем по формулам Мольвейде:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\psi - \varphi}{2} &= \frac{s_B - s_A}{b} \cos \frac{\beta}{2}; \quad \varphi = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\psi - \varphi}{2}; \\ \psi &= 90^\circ - \frac{\beta}{2} + \frac{\psi - \varphi}{2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Последовательное вычисление по формулам (20), (23), (22) повторяют до полной сходимости поправок f_A и f_B . Обычно бывает достаточно два-три приближения. В заключение, если необходимо, вычисляют координаты привязываемой точки. Погрешность определения положения точки подсчитывают по приближенной формуле, приведенной в работе [1],

$$M = \frac{0,35 \cdot b \cdot m_\nu}{\nu \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2}}. \quad (24)$$

Контролем привязки от грубых ошибок служат абсолютные значения поправок f_A и f_B , которые не должны выходить за пределы

$$|f_{\max}| \leq 2 \sqrt{\left(\frac{s_{\max}}{20R} \right)^2 + m_{\Delta H}^2 + \left(\frac{m_\nu \cdot s_{\max}}{p} \right)^2}, \quad (25)$$

где $m_{\Delta H}$ — погрешность взаимного определения отметок исходных и определяемой точек; R — средний радиус Земли; s_{\max} — расстояние до наиболее удаленного от станции опорного пункта.

Описанный способ привязки не требует наличия вертикальных базисов, что существенно расширяет возможности городской полигонометрии и позволяет использовать для закрепле-

ния пунктов не только стены капитальных зданий, но и другие инженерные сооружения. Закрепление опорных пунктов в этом случае сводится к передаче координат и высот на два любых высоко расположенных знака. При этом основное внимание уделяют обеспечению точности взаимного определения этих пунктов, что легко может быть достигнуто посредством применения сдвоенного звена, описанного в работе [2]. Репер, являющийся носителем только отметки, закладывается в цоколе ближайшего здания.

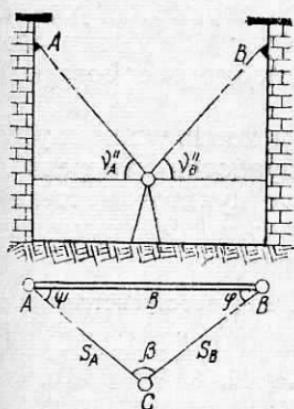


Рис. 3. Схема привязки к двум одиночным пространственным пунктам.

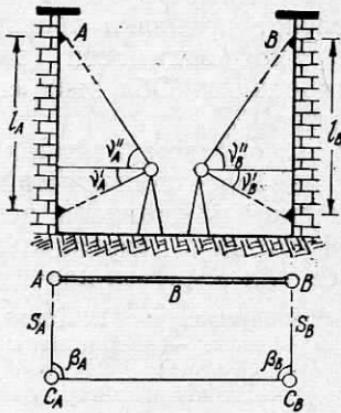


Рис. 4. Схема привязки к одиночным вертикальным базисам.

На величины f_A и f_B , вычисляемые по формулам (21) и (22), помимо кривизны Земли и рефракции, оказывают влияние также погрешности в отметках пространственных пунктов A и B , погрешности измерения углов наклона, а также погрешность определения горизонта инструмента. Если расстояния s не превышают 80...100 м, а точность измерения углов наклона и взаимного определения отметок исходных пунктов достаточно высокая, то величина f_B в формуле (22) будет главным образом являться следствием погрешности определения горизонта инструмента, в равной степени влияющей на превышения h_A и h_B . Для этих условий коэффициент $C = f_A : f_B$ следует принять равным единице. Благодаря этому погрешность в отметке исходного репера практически полностью исключается, что позволит определять отметки исходных реперов независимо от пространственных пунктов A и B . При неизменном взаимном положении данной системы из трех пунктов величины f_A и f_B при последующих привязках также остаются неизменными, что и будет служить контролем измерений и вычислений. Изменение величин f_A и f_B в процессе последующих привязок к данной системе пунктов свидетельствует или о погрешностях в измерении углов наклона, или о взаимном перемещении самих пунктов. Систематический учет указанных изменений во времени даст весьма

ценную информацию о деформациях инженерных сооружений и позволит периодически вносить необходимую корректуру в исходные данные.

Привязка к одиночным вертикальным базисам. При наличии только одиночных вертикальных базисов привязка производится по правилам, применяемым в обычной настенной полигонометрии. Разница будет лишь в том, что расстояния до стенных пунктов в этом случае непосредственно не измеряют, а вычисляют по формулам (1). При этом, если из определяемой точки имеется видимость на какой-либо соседний опорный пункт, то вычисление привязки производится по теореме синусов. Отсутствие такой видимости (рис. 4) требует обработки способом редуцирования. Оба этих способа подробно рассмотрены в руководстве [3].

Таким образом, применяя в каждом конкретном случае привязки наиболее подходящий способ обработки измерений, можно расширить диапазон использования пунктов настенной полигонометрии с вертикальными базисами без существенного ущерба для точности конечных результатов.

Список литературы: 1. Котов В. В. Обратная пространственная засечка по двум точкам. — Геодезия и картография, 1973, № 1. 2. Котов В. В. Привязка к пунктам настенной полигонометрии с помощью вертикальных базисов. — Геодезия и картография, 1973, № 12. 3. Руководство по применению стенных знаков в полигонометрических и теодолитных ходах. — М.: Недра, 1972. 4. Соустин В. Н. Усовершенствованный способ измерения превышений с помощью вертикального круга теодолита. — В кн.: Материалы научной конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1974 г. — Ишкар-Ола, 1975.

Работа поступила в редакцию 18 декабря 1978 года. Рекомендована кафедрой геодезии Пензенского инженерно-строительного института.