Если принять среднюю квадратическую погрешность нивелирования на 1 км хода равной 5 км, то ошибка пункта A по высоте будет

$$M = \frac{5}{\sqrt{0{,}45}} = \pm 7{,}5 \text{ мм},$$

а предельная 15 мм.

Вес пункта A, определенный из решения нормальных уравнений, равен 0,40, т. е. расхождение не превышает 0,05 или 12%.

В работе В. В. Котова [2] приведена сравнительная таблица точности четырех нивелирных сетей, где даны веса узловых пунктов, полученных:

1) по способу наименьших квадратов;
2) по формулам Котова В. В.;
3) по формулам Козлова В. И.;
4) по способу приближений.

Эти же нивелирные сети рассчитаны нами по формулам (1) и (2). Полученные значения весов узловых пунктов расходятся не более чем на 15% с величинами, вычисленными по способу наименьших квадратов.

Предлагаемый способ выгодно отличается от всех других своей простотой и может быть рекомендован для предварительных расчетов точности нивелирных сетей при составлении технических проектов.

Список литературы: 1. *Еленевский Н. Н.* Проектирование высотной геодезической сети в городах. — Геодезия и картография, 1957, вып. 6. 2. *Котов В. В.* Упрощенный способ оценки точности геодезических сетей при раздельном уравновешивании. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1971, вып. 13.

Работа поступила в редколлегию 6 июня 1977 г. Рекомендована Львовским политехническим институтом.

УДК 528.11

А. Н. КОЛЕСНИК, А. Л. ОСТРОВСКИЙ, д-р техн. наук, Б. Л. СКУИН
Львовский политехнический институт

УРАВНИВАНИЕ СВОБОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СЕТЕЙ

Под линейной сетью мы понимаем геодезическую сеть, образованную в пространстве измеренными линиями.

При обычном методе обработки таких сетей измеренные линии редуцируются на поверхность относимости (шара, эллипсоида вращения, плоскость), на которой и выполняют их уравнивание.

Для этого должны быть известны высоты пунктов над отсчетной поверхностью и элементы гравитационного поля. Трудность, а иногда и невозможность получения этих сведений с достаточной точностью (например, в горных районах) приводит часто к тому, что редуцирование сопровождается погрешностями, превышающими погрешности измерений, иначе говоря, происходит потеря точности при обработке измеренных линий.

Особую важность данный вопрос приобрел в последнее время вследствие прогресса технологии геодезических измерений и повышения требований к их качеству при создании геодезических сетей специального назначения, в частности космических базисов и геодинамических полигонов. В последних случаях мы имеем дело со свободными сетями.

Стремление избежать редуцирования линий на поверхность относимости приводит к мысли об уравнивании линейных сетей в пространственной системе координат. В пространственной фигуре, образованной тремя исходными пунктами и одним определяемым, избыточных измерений не возникает. Чтобы найти положение каждого последующего пункта, необходимо измерить по три расстояния. Дополнительные измерения создают внутренний контроль. Следовательно, в полностью измеренном многограннике с пятью вершинами возникает одно условие. Для подсчета числа условий в линейной пространственной сети общего вида может служить формула

$$r=s-3(p-2), \tag{1}$$

где s — количество измеренных сторон; p — количество пунктов. С увеличением количества пунктов число условий быстро растет:

p	4	5	6	7	8	9	10 ...
r	0	1	3	6	10	15	21 ...

Изложим кратко методы составления условных уравнений поправок сторон на примере линейной пространственной геодезической сети [1] (рис. 1), созданной в Карпатах.

Количество условных уравнений в этой сети $r=18-3(7-2)=3$.

Один из методов заключается в том, что необходимо так выбрать прямоугольную пространственную систему координат X, Y, Z, например, с началом 0 в точке *7*, чтобы плоскость XOY совпадала с плоскостью треугольника *7, 4, 3*, являющегося базисным. Ось OX направим по стороне *7, 4,* ось OY — перпендикулярно оси OX, ось OZ — перпендикулярно плоскости треугольника *3, 4, 7*. Измеренных сторон *4, 7; 3, 4 и 3, 7* достаточно для определения координат всех пунктов базисного треугольника. Прямоугольные координаты пункта *1* можно определить по формулам линейной пространственной засечки [3], использовав измеренные стороны *7, 1; 4, 1* и *3, 1*. Таким же образом получим координаты пунктов *6, 2* и *5* по сторонам соответственно *1, 6; 6, 7; 3, 6; 1, 2; 2, 3; 2, 6* и *4,5; 5, 7; 1, 5*.

Следовательно, измерения линий *2, 4, 5, 6* и *2, 5* являются в данной сети избыточными, и возникающие условия в общем виде можно записать так:

$$s^2_{2.4} - (x_4 - x_2)^2 - (y_4 - y_2)^2 - (z_4 - z_2)^2 = 0;$$
$$s^2_{5.6} - (x_5 - x_6)^2 - (y_5 - y_6)^2 - (z_5 - z_6) = 0; \qquad (2)$$
$$s^2_{2.5} - (x_2 - x_5)^2 - (y_2 - y_5)^2 - (z_2 - z_5)^2 = 0.$$

Выразив вычисленные координаты пунктов через измеренные стороны, можно затем по известным правилам получить условные уравнения поправок сторон.

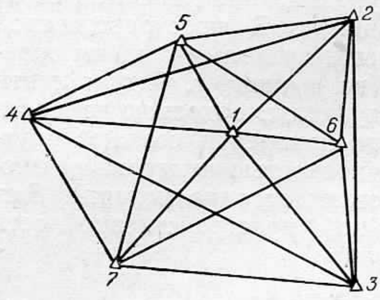

Рис. 1. Схема линейной сети.

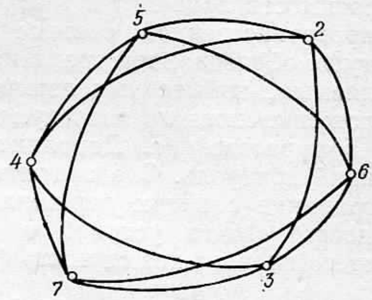

Рис. 2. Схема расположения сферических треугольников.

Другой путь составления условий, на наш взгляд менее громоздкий, заключается в следующем. Опишем сферу произвольного радиуса с центром в пункте 1, на которую продолжением соответствующих сторон спроектируем все остальные пункты. В результате получим систему сферических треугольников, показанную схематически на рис. 2. Здесь цифрами обозначены проекции соответствующих пунктов на сфере. Сферические стороны треугольников численно равны углам при вершине *1* плоских пространственных треугольников. Так, сферическая сторона *4, 5* численно равна плоскому углу при вершине *1* пространственного треугольника *1, 4, 5* и т. д.

Обозначим через A_i^{jk} угол пространственного треугольника *i, j, k* при вершине *i* или соответствующую ему сферическую сторону; а через a_i^{jk} — угол сферического треугольника *i, j, k* при вершине *i*.

Пользуясь рис. 2, можно составить шесть условных уравнений, из которых только три являются независимыми.

В качестве примера рассмотрим порядок составления условного уравнения поправок сторон, используя зависимость между сферическими углами при вершине 7.

На основании рис. 2 можно записать:

$$a_7^{4,5} + a_7^{5,6} + a_7^{3,6} - a_7^{3,4} = 0.$$

Сферические углы a вычисляем по теореме косинусов по известным сферическим сторонам A:

$$a_7^{36} = \arccos \frac{\cos A_1^{3.6} - \cos A_1^{6.7} \cdot \cos A_1^{3.7}}{\sin A_1^{6.7} \cdot \sin A_1^{3.7}}. \tag{3}$$

Условное уравнение поправок сферических углов δa_i^{jk} при вершине 7 имеет вид

$$\delta a_7^{4.5} + \delta a_7^{5.6} + \delta a_7^{3.6} - \delta a_7^{3.4} + w = 0, \tag{4}$$

где $w = a_7^{4.5} + a_7^{5.6} + a_7^{3.6} - a_7^{3.4}$.

Отсюда легко перейти к условному уравнению поправок углов пространственных треугольников:

$$\frac{\delta A_1^{4.5} - \cos a_4^{5.7}\,\delta A_1^{4.7} - \cos a_5^{4.7}\,\delta A_1^{5.7}}{\sin A_1^{4.7} \cdot \sin a_4^{5.7}} +$$
$$+ \frac{\delta A_1^{5.6} - \cos a_5^{6.7}\,\delta A_1^{3.7} - \cos a_6^{5.7}\,\delta A_1^{6.7}}{\sin A_1^{5.7} \cdot \sin a_5^{6.7}} +$$
$$+ \frac{\delta A_1^{3.6} - \cos a_6^{3.7}\,\delta A_1^{6.7} - \cos a_3^{6.7}\,\delta A_1^{3.7}}{\sin A_1^{6.7} \cdot \sin a_6^{3.7}} -$$
$$- \frac{\delta A_1^{3.4} - \cos a_4^{3.7}\,\delta A_1^{4.7} - \cos a_3^{4.7}\,\delta A_1^{3.7}}{\sin A_1^{4.7} \cdot \sin a_4^{3.7}} - w = 0. \tag{5}$$

Как известно [2], поправки углов пространственных треугольников выражают через поправки измеренных сторон следующим образом:

$$\delta A_i^{ik} = \frac{\rho''}{h_i^{jk}} \delta s_{jk} - \cos A_j^{ik}\,\delta S_{ij} - \cos A_k^{ij}\,\delta s_{ik}. \tag{6}$$

Сделав соответствующую замену, можно получить условное уравнение поправок измеренных сторон.

Для уравнивания линейной пространственной сети в Карпатах были составлены таким способом три условные уравнения при вершинах 5, 6 и 7 и обычным способом найдены поправки измеренных сторон.

Для сравнения эта же сеть была приведена на плоскость и уравнена. Отметим, что данные для редуцирования известны с большой точностью. Так, высоты пунктов получены в результате геометрического нивелирования 2 кл., и на участок работ имеется довольно подробная гравиметрическая карта.

Сопоставляя результаты уравнивания сети в пространстве и на плоскости (см. таблицу), можно заметить, что поправки измеренных сторон, полученные из уравнивания сети в пространстве, более равномерно распределяются по величине. Этот результат хорошо согласуется с наблюдающейся равноточностью измерений.

Интересно отметить, что бо́льшие поправки из уравнивани на плоскости получили преимущественно стороны, выходящи из пункта *2*, имеющего наибольшую высоту, а значит, отягощен ные в большей степени ошибками редуцирования.

Поправки из уравнивания измеренных расстояний в пространстве и на плоскости

Название линий	Поправки из уравнивания в пространстве, мм	Поправки из уравнивания на плоскости, мм	Название линий	Поправки из уравнивания в пространстве, мм	Поправки из уравнивания на плоскости, мм
1,2	− 5	− 2	3,7	− 7	−13
1,3	+ 3	0	4,5	− 5	+ 9
1,4	+ 3	0	4,7	− 7	−11
1,5	+ 4	+ 4	5,6	−11	−10
1,6	+ 5	+ 3	5,7	+ 5	+ 2
1,7	− 3	+ 1	6,7	+ 5	+ 6
2,3	0	− 9	Среднее из абсолютных значений	4,3	7,1
2,4	0	−16	$[VV]$	452	1377
2,5	+ 3	+16	Дисперсия $\frac{[VV]}{n}$	25,1	76,5
2,6	+ 2	+10			
3,4	+ 6	+13			
3,6	− 4	+ 2			

Это обстоятельство также может служить косвенным подтверждением преимущества уравнивания сетей в пространстве без редуцирования, элементы которого в отдельных случаях могут быть и неизвестны.

Список литературы: 1. *Вировец Ю. Б., Наумов Я. В., Островский А. Л.* Эталонный геодезический полигон в горном районе. — Геодезия и картография, 1971, вып. 12. 2. *Филиппов А. Е.* Условные уравнения в сети пространственной трилатерации. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1969, вып. 9. 3. *Иордан В., Эггерт О., Кнейсль М.* Руководство по геодезии. М., Недра, 1971.

Работа поступила в редколлегию 18 января 1978 года. Рекомендована кафедрой геодезии Львовского политехнического института.

УДК 528.34:629.783

Л. Л. КОРОТКОВА
Львовский политехнический институт

ВЫБОРОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ГЕОДЕЗИИ И СЕЛЕНОДЕЗИИ

При описании и изучении гравитационного поля Земли и различных его характеристик широко используют сферические функции. Однако более детальное изучение поля требует упрощения применяемого математического аппарата, поскольку воз-