УДК 528.33.35

В. В. ЛОЗИНСКИЙ

ТОЧНОСТЬ ДИРЕКЦИОННОГО УГЛА СВЯЗУЮЩИХ СТОРОН РЯДА ИЗ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ, ПРОЛОЖЕННОГО МЕЖДУ СТОРОНАМИ С ИСХОДНЫМИ ДИРЕКЦИОННЫМИ УГЛАМИ

Распределение погрешностей в линейно-угловых рядах, состоящих из центральных систем (или из двух рядов равносторонних треугольников) без избыточных данных, в основном изучено [1]. Что же касается несвободных сетей, то данные об их исследовании в литературе отсутствуют.

Наличие исходных дирекционных углов значительно повышает точность элементов ряда. Поэтому данная статья посвящена вопросу предвычисления точности дирекционных углов связующих сторон ряда, состоящего из центральных систем (см. рисунок).

При уравнивании такого ряда по методу условных измерений возникает $4N+2$ условных уравнений фигур, $8N+4$ синусных условных уравнений, N условных уравнений горизонта и уравнение дирекционных углов (N — число центральных систем в ряду).

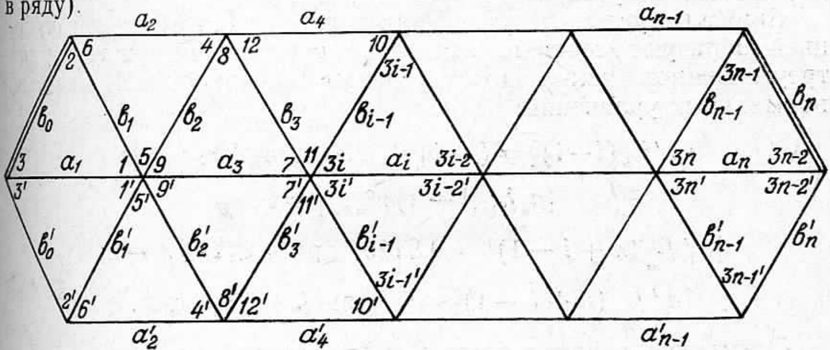

Схема линейно-углового ряда из центральных систем.

Весовая функция для дирекционного угла k-й связующей стороны треугольника верхнего ряда имеет вид

$$dF_{\alpha_k} = \sum_{i=1}^{k} (3i-1)(-1)^i, \qquad (1)$$

где i — порядковый номер треугольника в верхнем ряду.

Поскольку вероятнейшие поправки в углы и относительные поправки в длины сторон для данного класса линейно-угловой триангуляции имеют один и тот же порядок малости, будем считать угловые измерения в радианах и относительные линейные равноточными.

Решение нормальных уравнений выполнялось по методу двух групп [2]. В левую группу включали условные уравнения фигур, во вторую — все остальные условные уравнения. Преобразованные коэффициенты условных уравнений второй группы, полученные по известному правилу Н. А. Урмаева, обозначим через a_i, b_i, c_j ($j=1, 2, 3, \ldots, N$) и d, а коэффициенты весовой функции через f_α.

Для определения веса уравненного дирекционного угла имеем

$$\frac{1}{P_\alpha} = [f_\alpha f_\alpha] - \sum_{i=1}^{n} \frac{[a_i f_\alpha(i-1)]^2}{[a_i a_i(i-1)]} - \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n} \frac{[a_i' f_\alpha(n+i-1)]^2}{[a_i' a_i'(n+i-1)]} - \ldots,$$

здесь n — число треугольников в верхнем ряду.

Запишем квадратичный коэффициент нормальных уравнений для весовой функции

$$[f_{\alpha_k} f_{\alpha_k}] = \frac{2}{3} k. \tag{2}$$

Из решения нормальных уравнений получены необходимые коэффициенты для определения обратного веса уравненного дирекционного угла связующей стороны.

Синусные условные уравнения первого вида с весовой функцией образуют соответственно для верхнего и нижнего ряда треугольников такие коэффициенты эквивалентной системы нормальных уравнений:

$$[a_i' f_{\alpha_k}(i-1)] = (-1)^i 0{,}5774, \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant k;$$

$$[a_i f_{\alpha_k}(i-1)]\Big|_{i=k+1}^{n} = 0;$$

$$[a_i' f_{\alpha_k}(n+i-1)] = 0{,}2165, \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n-2;$$

$$[a_i' f_{\alpha_k}(n+i-1)] = 0, \text{ при } k+1 \leqslant i \leqslant n.$$

Суммарное влияние этого вида уравнений на обратный вес функции дирекционного угла для верхнего ряда треугольников

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{[a_i' f_\alpha (i-1)]^2}{[a_i a_i (i-1)]} = 0{,}125\,k, \tag{3}$$

а для нижнего ряда треугольников

$$\text{при нечетных } k \quad \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n} \frac{[a_i' f_\alpha (n+i-1)]^2}{[a_i' a_i' (n+i-1)]} = 0{,}0102\,k + 0{,}0102;$$

$$\text{при четных } k \quad \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n} \frac{[a_i' f_\alpha (n+i-1)]^2}{[a_i' a_i' (n+i-1)]} = 0{,}0102\,k. \tag{4}$$

Неквадратичные коэффициенты синусных уравнений второго вида и весовой функции дирекционного угла можно представить следующими выражениями:

$$[b_1 f_{\alpha_1} \cdot 2n] = 0{,}3359;$$

$$\text{при } 1 < k \leqslant n-1 \quad [b_1 f_{\alpha_k} \cdot 2n] = 0{,}5524;$$

$$\text{при } 2 < k \leqslant n-1 \quad [b_2 f_{\alpha_k} (2n+1)] = -0{,}3584.$$

Далее при $k < i$:

$$\text{для нечетных } i \quad [b_i f_{\alpha_k} (2n+i-1)]\Big|_{i \geqslant 3}^{i<n} =$$

$$= 0{,}4182 \frac{[b_{i-1} f_{\alpha_k} (2n+i-2)]}{[b_{i-1} b_{i-1} (2n+i-2)]};$$

для четных i

$$[b_i f_{\alpha_k}(2n+i-1)]\Big|_{i\geqslant 2}^{i\leqslant n-1} = 0{,}5\,\frac{[b_{i-1}\, f_{\alpha_k}(2n+i-2)]}{[b_{i-1}\, b_{i-1}(2n+i-2)]};$$

при $k=i$:

$$\text{для нечетных } i\ [b_i f_{\alpha_k}(2n+i-1)] =$$

$$= 0{,}3359 - 0{,}4182\,\frac{[b_{i-1} f_{\alpha_k}(2n+i-2)]}{[b_{i-1}\, b_{i-1}(2n+i-2)]},$$

для четных i

$$[b_i f_{\alpha_k}(2n+i-1)] = -0{,}2887 + 0{,}5\,\frac{[b_{i-1} f_{\alpha_k}(2n+i-2)]}{[b_{i-1} b_{i-1}(2n+i-2)]};$$

при $k>i$:

$$\text{для нечетных } i\ [b_i f_{\alpha_k}(2n+i-1)]\Big|_{i\geqslant 3}^{i=n-2} =$$

$$= 0{,}5524 - 0{,}3013\,[b_{i-1} f_{\alpha_k}(2n+i-2)],$$

$$\text{для четных } i\ [b_i f_{\alpha_k}(2n+i-1)]\Big|_{i>2}^{i=n-3} =$$

$$= -0{,}5406 + 0{,}3603\,[b_{i-1} f_{\alpha_k}(2n+i-2)].$$

После ряда преобразований, суммируя для n членов, получаем суммарное влияние синусных уравнений второго вида и весовой функции на значение обратного веса функции дирекционного угла для верхнего ряда треугольников:

$$\text{для нечетных } k\ \sum_1^n \frac{[b_i f_{\alpha_k}(2n+i-1)]^2}{[b_i b_i(2n+i-1)]} = 0{,}1233\,k - 0{,}03925;$$

$$\text{для четных } k\ \sum_1^n \frac{[b_i f_{\alpha_k}(2n+i-1)]^2}{[b_i b_i(2n+i-1)]} = 0{,}12075\,k - 0{,}03125.$$

Неквадратичные коэффициенты этого же вида уравнений для нижнего ряда треугольников с достаточной точностью можно принять:

для нечетных i

при $i<k<n$ $[b_i' f_{\alpha_k}(3n+i-1)] = -0{,}21$,

при $k=i$ $[b_i' f_{\alpha_k}(3n+i-1)] = -0{,}1988$,

при $k=i-1$ $[b_i' f_{\alpha_k}(3n+i-1)] = -0{,}03$,

при $k=i-2$ $[b_i' f_{\alpha_k}(3n+i-1)] = -0{,}01$;

для четных i

при $k=i+1$ $[b_i' f_{\alpha_k}(3n+i-1)] = 0{,}091$,

при $i+1<k<n-1$ $[b_i' f_{\alpha_k}(3n+i-1)] = 0{,}1$,

при $k=i$ $[b_i' f_{\alpha k}(3n+i-1)] = -0{,}072$,

при $k=i-1$ $[b_i' f_{\alpha_k}(3n+i-1)] = -0{,}08$.

Остальные коэффициенты такого вида уравнений приняты равными нулю, так как их влияние на определение обратного веса незначительно.

Следовательно, суммарное влияние синусных уравнений второго вида и весовой функции на обратный вес определится из формул:

для нечетных k $$\sum_{1}^{n} \frac{[b_i' f_{\alpha_k}(3n+i-1)]^2}{[b_i' b_i' (3n+i-1)]} = 0{,}0202\,k + 0{,}0115;$$

для четных k $$\sum_{1}^{n} \frac{[b_i' f_{\alpha_k}(3n+i-1)]^2}{[b_i' b_i' (3n+i-1)]} = 0{,}0205\,k - 0{,}0022.$$

Для уравнений горизонта и весовой функции получим:

$$[c_1 f_{\alpha_1} \cdot 4n] = 0{,}2646;\ [c_1 f_{\alpha_2} \cdot 4n] = 0{,}8061;\ [c_1 f_{\alpha_3} \cdot 4n] = 1{,}0596;$$
$$[c_2 f_{\alpha_1}(4n+1)] = 0{,}059;\ [c_2 f_{\alpha_2}(4n+1)] = 0{,}121;$$
$$[c_2 f_{\alpha_3}(4n+1)] = 0{,}4205;$$
$$[c_2 f_{\alpha_4}(4n+1)] = 0{,}9627;\ [c_3 f_{\alpha_3}(4n+2)] = 0{,}07;$$
$$[c_3 f_{\alpha_4}(4n+2)] = 0{,}1416;\ [c_5 f_{\alpha_8}(4n+4)] = 0{,}133.$$

Последующие коэффициенты этого вида с ошибкой не более 2% можно принять:

$$[c_1 f_{\alpha_k} \cdot 4n] = 1{,}02;$$
$$[c_j f_{\alpha_k}(4n+j-1)] = 0{,}44 \text{ при } j = 3,4,5,\ldots \text{ и } k = 5,7,9,\ldots;$$
$$[c_j f_{\alpha_k}(4n+j-1)] = 0{,}975 \text{ при } j = 3,4,5,\ldots \text{ и } k = 6,8,10,\ldots;$$
$$[c_j f_{\alpha_k}(4n+j-1)] = 1{,}2 \text{ при } j = 2,3,4,\ldots \text{ и } k \geqslant 5,7,9,\ldots.$$

Остальные коэффициенты этого вида уравнений без существенной потери точности примем равными нулю. Поэтому, опустив ряд преобразований, суммарное влияние этих уравнений на обратный вес функции дирекционного угла представим выражениями:

для нечетных k

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{[c_j f_{\alpha_k}(4n+j-1)]^2}{[c_j c_i (4n+j-1)]} = 0{,}2349\,k - 0{,}214; \qquad (7)$$

для четных k

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{[c_j f_{\alpha_k}(4n+j-1)]^2}{[c_j c_j (4n+j-1)]} = 0{,}2376\,k - 0{,}2566.$$

Коэффициент последнего элимационного уравнения надежно определяется следующим образом:

для нечетных k $[d f_{\alpha_k}(4n+N)] = 0{,}1512\,k + 0{,}1291;$

для четных k $[d f_{\alpha_k}(4n+N)] = 0{,}1512\,k + 0{,}1926,$

а $$[dd\,(4n+N)] = 0{,}2837\,N + 0{,}5688,$$

следовательно, для нечетных k

$$\frac{[df_{\alpha_k}(4n+N)]^2}{[dd\,(4n+N)]} = \frac{0{,}0293\,(1{,}171\,k+1)^2}{0{,}5\,N+1};$$

для четных k (8)

$$\frac{[df_{\alpha_k}(4n+N)]^2}{[dd\,(4n+N)]} = \frac{0{,}0652\,(0{,}785\,k+1)^2}{0{,}5\,N+1}.$$

Зная величины (2)—(8), определяем значение обратного веса функции дирекционного угла связующей стороны в середине ряда:

$$\text{для нечетных } k \quad \frac{1}{P_{\alpha_b}} = 0{,}153\,k + 0{,}232 - \frac{0{,}029\,(1{,}171\,k+1)^2}{0{,}5N+1};$$

$$\text{для четных } k \quad \frac{1}{P_{\alpha_b}} = 0{,}153\,k + 0{,}29 - \frac{0{,}065\,(0{,}785\,k+1)^2}{0{,}5\,N+1}. \qquad (9)$$

Для проверки формул (9) были решены численные примеры по схеме Гаусса. В таблице приведены значения обратных весов функций дирекционных углов, полученных из решения схемы Гаусса и вычисленных по формулам (9).

Значения обратных весов

k	N = 1		2		3		4		5		6	
	по схеме Гаусса	по формуле (9)	по схеме Гаусса	по формуле (9)	по схеме Гаусса	по формуле (9)	по схеме Гаусса	по формуле (9)	по схеме Гаусса	по формуле (9)	по схеме Гаусса	по формуле (9)
1	0,271	0,294	0,312	0,317	0,327	0,330	0,336	0,339	0,342	0,346	0,347	0,351
2	0,271	0,310	0,387	0,381	0,430	0,424	0,458	0,453	0,478	0,473	0,493	0,489
3			0,387	0,396	0,483	0,455	0,530	0,494	0,561	0,522	0,585	0,543
4			0,312	0,345	0,483	0,456	0,560	0,531	0,613	0,584	0,653	0,624
5					0,430	0,452	0,560	0,543	0,630	0,608	0,681	0,656
6					0,327	0,360	0,530	0,502	0,630	0,602	0,703	0,678
7							0,458	0,485	0,613	0,602	0,703	0,690
8							0,336	0,366	0,561	0,530	0,681	0,653
9									0,478	0,506	0,653	0,644
10									0,342	0,365	0,585	0,547
11											0,493	0,518
12											0,347	0,362

Как видно из приведенных вычислений, погрешности в определении обратных весов по формулам (9) невелики и этими формулами вполне можно пользоваться при оценке точности проектируемых сетей указанного вида при различном количестве центральных систем в ряде.

Список литературы: 1. *Монин И. Ф.* Предвычисление точности рядов из центральных систем линейно-угловой триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1976, вып. 24. 2. *Проворов К. Л.* Точность цепи триангуляции с измеренными сторонами и углами. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1959, № 3.

Работа поступила в редколлегию 5 января 1979 года. Рекомендована кафедрой геоморфологии Львовского государственного университета.