Интересно отметить, что бо́льшие поправки из уравнивания на плоскости получили преимущественно стороны, выходящие из пункта *2*, имеющего наибольшую высоту, а значит, отягощенные в большей степени ошибками редуцирования.

Поправки из уравнивания измеренных расстояний в пространстве и на плоскости

Название линий	Поправки из уравнивания в пространстве, мм	Поправки из уравнивания на плоскости, мм	Название линий	Поправки из уравнивания в пространстве, мм	Поправки из уравнивания на плоскости, мм
1,2	−5	−2	3,7	−7	−13
1,3	+3	0	4,5	−5	+9
1,4	+3	0	4,7	−7	−11
1,5	+4	+4	5,6	−11	−10
1,6	+5	+3	5,7	+5	+2
1,7	−3	+1	6,7	+5	+6
2,3	0	−9	Среднее из абсолютных значений	4,3	7,1
2,4	0	−16	$[VV]$	452	1377
2,5	+3	+16	Дисперсия $\frac{[VV]}{n}$	25,1	76,5
2,6	+2	+10			
3,4	+6	+13			
3,6	−4	+2			

Это обстоятельство также может служить косвенным подтверждением преимущества уравнивания сетей в пространстве без редуцирования, элементы которого в отдельных случаях могут быть и неизвестны.

Список литературы: 1. *Вировец Ю. Б., Наумов Я. В., Островский А. Л.* Эталонный геодезический полигон в горном районе. — Геодезия и картография, 1971, вып. 12. 2. *Филиппов А. Е.* Условные уравнения в сети пространственной трилатерации. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1969, вып. 9. 3. *Иордан В., Эггерт О., Кнейсль М.* Руководство по геодезии. М., Недра, 1971.

Работа поступила в редколлегию 18 января 1978 года. Рекомендована кафедрой геодезии Львовского политехнического института.

УДК 528.34:629.783

Л. Л. КОРОТКОВА
Львовский политехнический институт

ВЫБОРОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ГЕОДЕЗИИ И СЕЛЕНОДЕЗИИ

При описании и изучении гравитационного поля Земли и различных его характеристик широко используют сферические функции. Однако более детальное изучение поля требует упрощения применяемого математического аппарата, поскольку возрастает объем вычислительных работ, обусловленных необходимостью учета большого числа параметров поля. Например, изучение коротковолновых деталей геоида протяженностью в 1° потребует разложения по сферическим функциям до 180 степени и порядка, т. е. учета $(180+1)^2=32761$ члена в разложении потенциала и радиус-вектор геоида [10].

Для упрощения вычислений и их автоматизации в 1968 г. в *SAO* С. А. Лундквист и Дж. Е. О. Джакалия предложили использовать вместо сферических функций их линейные комбинации (так называемые *выборочные функции*) — sampling functions [4—10].

Пусть на сфере, отнесенной к географическим координатам $\left(\lambda\text{ — долгота; } \varphi\text{ — широта; } \theta=\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$, задана некоторая функция $f(\varphi, \lambda)$, представленная рядом сферических функций до некоторой степени N:

$$f(\varphi,\lambda)=\sum_{n=0}^{N} Y_{nm}(\varphi,\lambda)=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}(A^{nm}\cos m\lambda+B^{nm}\sin m\lambda)\,P_{nm}(\sin\varphi). \tag{1}$$

В теории выборочных функций вместо ряда (1) записывают

$$f(\varphi,\lambda)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{2k} f(\varphi_k,\lambda_{kj})\,Z_{kj}(\varphi,\lambda), \tag{2}$$

где φ_k, λ_{kj} — координаты так называемых *выборочных точек*, обычно выбираемых равномерно на сфере:

$$\begin{aligned}
&\theta_{2k}=\frac{2\pi}{2N+1}k, \quad k=0,1,2,\ldots,\left[\frac{N}{2}\right];\\
&\theta_{2k+1}=\frac{2\pi}{2N+1}(N-k), \quad k=0,1,2,\ldots,\left[\frac{N-1}{2}\right];\\
&\lambda_{kj}=\frac{2\pi}{2k+1}j, \quad \begin{matrix}k=0,1,2,\ldots,N;\\ j=0,1,2,\ldots,2k;\end{matrix}
\end{aligned} \tag{3}$$

$Z_{kj}(\varphi,\lambda)$ — выборочные функции; $f(\varphi_k,\lambda_{kj})$ — табулированные значения описываемой функции в выборочных точках.

В каждой из выборочных точек только единственная соответственная выборочная функция имеет ненулевое значение, т. е. каждая из выборочных функций имеет значение единицы в одной выборочной точке и нуль — в остальных. Это свойство выборочных функций называется свойством *локализации*:

$$Z_{kj}(\varphi_i,\lambda_{ji})=\delta_{kj,ji},\ \delta_{kj,ji}\text{ — символ Кронекера}=\begin{cases}1 \text{ при } k=i;\\ 0 \text{ при } k\neq i.\end{cases} \tag{4}$$

Выборочные функции на множестве выборочных точек обладают еще свойствами *ортогональности*

$$\sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{2k} Z_{pq}(\varphi_k, \lambda_{kj})\, Z_{sl}(\varphi_k, \lambda_{kj}) = \delta_{pq,\, sl} \tag{5}$$

и *нормальности*

$$\sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{2k} Z_{kj}(\varphi, \lambda) = 1. \tag{6}$$

Разложения $f(\varphi, \lambda)$ по сферическим функциям (1) до степени и порядка N и по M выборочным функциям (2) полностью эквивалентны, поскольку каждая из них представляет разложение по M независимым (базисным) функциям на сфере. В работах [6—10] приведены формулы, выражающие выборочные функции через сферические и наоборот.

Выборочные функции применяют и при описании функции 3^x переменных в окрестности сферы радиуса r_0. Наглядный пример — разложение потенциала силы тяжести

$$V(r, \varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\varphi, \lambda)}{r^{n+1}},$$

который при усечении ряда можно представить как

$$V(r, \varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{2k} V(r_k, \varphi_k, \lambda_{kj})\, Z_{kj}(r, \varphi, \lambda). \tag{7}$$

Здесь $V(r_k, \varphi_k, \lambda_{kj})$ — значения потенциала в выборочных точках; φ_k, λ_{kj} вычисляют по формулам (3); r_k — радиус геоида на долготе λ и широте φ, определяемый по следующей формуле [6]:

$$r = r_0 \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} \bar{A}^{nm}\, Y_{nm}(\varphi, \lambda), \tag{8}$$

или

$$r = r_0 \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{2k} \frac{r(\varphi_k, \lambda_{kj})}{r_0}\, Z_{kj}(\varphi, \lambda), \tag{9}$$

где $Y_{nm}(\varphi, \lambda) = P_{nm}(\sin\varphi) \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases}$ — элементарные поверхностные сферические гармоники; $Z_{kj}(r, \varphi, \lambda)$ — выборочные функции (в данном случае комбинации шаровых функций):

$$Z_{kj}(r, \varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} B_{kj}^{nm}\, Y_{nm}(r, \varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} B_{kj}^{nm} Y_{nm}(\varphi, \lambda), \tag{10}$$

или

$$Z_{kj}(r, \varphi, \lambda) = \left(\frac{r_0}{r}\right) Z_{kj}(\varphi, \lambda) + \left(\frac{r - r_0}{r}\right) \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} B_{kj}^{nm}\, Y_{nm}(\varphi, \lambda) + \cdots \tag{11}$$

Приведем конкретные примеры разложения по формуле (7). Для $N=2$, когда $M=(N+1)^2=9$, это разложение имеет вид:

$$\theta_0=0,\ \ \theta_1=\frac{4}{5}\pi,\ \ \theta_2=\frac{2}{5}\pi,\ \ \lambda_{10}=0,\ \ \lambda_{11}=\frac{2}{3}\pi,\ \ \lambda_{12}=\frac{4}{3}\pi,\ \ \lambda_{20}=0;$$

$$\lambda_{21}=\frac{2}{5}\pi,\ \ \lambda_{22}=\frac{4}{5}\pi,\ \ \lambda_{23}=\frac{6}{5}\pi,\ \ \lambda_{24}=\frac{8}{5}\pi;$$

$$r=r_0\sum_{k=0}^{2}\sum_{j=0}^{4}\frac{r(\varphi_k\,\lambda_{kj})}{r_0}Z_{kj}\cdot(\varphi,\lambda);$$

$$V(r,\varphi,\lambda)=\sum_{k=0}^{2}\sum_{j=0}^{4}V(r_k,\varphi_k,\lambda_{kj})\,Z_{kj}(r,\varphi,\lambda)=V(r_0,\varphi_0,\lambda_{00})\times$$

$$\times Z_{00}(r,\varphi,\lambda)+V(r_1,\varphi_1,\lambda_{10})\,Z_{10}(r,\varphi,\lambda)+V(r_1,\varphi_1,\lambda_{11})\times$$

$$\times Z_{11}(r,\varphi,\lambda)+V(r_1,\varphi_1,\lambda_{12})\,Z_{12}(r,\varphi,\lambda)+V(r_2,\varphi_2,\lambda_{20})\,Z_{20}(r,\varphi,\lambda)+$$

$$+V(r_2,\varphi_2,\lambda_{21})\,Z_{21}(r,\varphi,\lambda)+V(r_2,\varphi_2,\lambda_{22})\,Z_{22}(r,\varphi,\lambda)+$$

$$+V(r_2,\varphi_2,\lambda_{23})\,Z_{23}(r,\varphi,\lambda)+V(r_2,\varphi_2,\lambda_{24})\,Z_{24}(r,\varphi,\lambda).$$

Аналогично для $N=3$:

$$\theta_0=0,\ \ \theta_1=\frac{6}{7}\pi,\ \ \theta_2=\frac{2}{7}\pi,\ \ \theta_3=\frac{4}{7}\pi,\ \ \lambda_{10}=0,\ \ \lambda_{11}=\frac{2}{3}\pi;$$

$$\lambda_{12}=\frac{4}{3}\pi,\ \lambda_{20}=0;$$

$$\lambda_{21}=\frac{2}{5}\pi,\ \ \lambda_{22}=\frac{4}{5}\pi,\ \ \lambda_{23}=\frac{6}{5}\pi,\ \ \lambda_{24}=\frac{8}{5}\pi,\ \ \lambda_{30}=0;$$

$$\lambda_{31}=\frac{2}{7}\pi,\ \ \lambda_{32}=\frac{4}{7}\pi;$$

$$\lambda_{33}=\frac{6}{7}\pi,\ \ \lambda_{34}=\frac{8}{7}\pi,\ \lambda_{35}=\frac{10}{7}\pi,\ \ \lambda_{36}=\frac{12}{7}\pi;$$

$$r=r_0\sum_{k=0}^{3}\sum_{j=0}^{6}\frac{r(\varphi_k\,\lambda_{kj})}{r_0}Z_{kj}(\varphi,\lambda);$$

$$V(r,\varphi,\lambda)=\sum_{k=0}^{3}\sum_{j=0}^{6}V(r_k,\varphi_k,\lambda_{kj})\,Z_{kj}(r,\varphi,\lambda)=$$

$$=V(r_0,\varphi_0,\lambda_{00})\,Z_{00}(r,\varphi,\lambda)+V(r_1,\varphi_1,\lambda_{10})\,Z_{10}(r,\varphi,\lambda)+$$

$$+V(r_1,\varphi_1,\lambda_{11})\,Z_{11}(r,\varphi,\lambda)+V(r_1,\varphi_1,\lambda_{12})\,Z_{12}(r,\varphi,\lambda)+$$

$$+V(r_2,\varphi_2,\lambda_{20})\,Z_{20}(r,\varphi,\lambda)+V(r_2,\varphi_2,\lambda_{21})\,Z_{21}(r,\varphi,\lambda)+$$

$$+\cdots+V(r_3,\varphi_3,\lambda_{36})\,Z_{36}(r,\varphi,\lambda).$$

Заметим, что выборочные функции (7) гармонические, поскольку они являются линейными комбинациями элементарных шаровых функций.

Выборочные функции начинают широко применяться при вычислении радиус-векторов геоида, топографии поверхности, ускорений и потенциала силы тяжести. Впервые С. А. Лундквист и Дж. Е. О. Джакалия [6—10] не только всесторонне разработали математический аппарат выборочных функций, но и указали области практического его применения.

В дальнейшем проблемами практического использования выборочных функций при описании геопотенциала занимался Г. Шмидт, который сделал расчет по этим функциям для $N=19{,}22$ и 24 [11—13]. Результаты его исследований позволили сделать вывод о том, что выборочные функции действительно могут заменить сферические от 36 до 180 степени.

В это же время А. Дрожинер [1] изучал некоторые теоретические аспекты разложения геопотенциала в ряд по выборочным функциям, используя конструкцию векторного пространства формальных линейных комбинаций на некоторой системе объектов. Он также сравнивал этот метод с методом разложения в ряд по сферическим функциям до $N=4$ в том случае, когда распределение выборочных точек ведет к ортонормальным выборочным функциям с весовой функцией, тождественно равной единице.

Выборочные функции можно использовать и при описании и изучении гравитационных полей, различных их характеристик, рельефов других планет. Так, в 1974 г. в Государственном астрономическом институте им. П. К. Штернберга Н. А. Чуйкова [3] сделала сравнительный анализ разложения фигуры Луны по сферическим и выборочным функциям и показала преимущества последних.

Анализируя результаты этой работы, мы пришли к некоторым выводам относительно практического использования выборочных функций, а именно:

1. Использование выборочных функций дает возможность значительно сократить объем используемой исходной информации. Так, для разложения рельефа Луны по сферическим функциям потребовалось 316 исходных высот, а по выборочным — только 81 высота точек, выбранных в соответствии с требованиями теории обсуждаемых функций [3].

2. При разложении по выборочным функциям значительно уменьшается объем вычислений. Если коэффициенты разложения по сферическим функциям $\bar{A}_{nm}$, $\bar{B}_{nm}$ находят из решения уравнений способом наименьших квадратов по системе 316 уравнений погрешностей, то использование аппарата выборочных функций позволяет найти эти коэффициенты с той же точностью из решения только 81 уравнения, что подтверждают табл. 1 и 5 из работы [3].

3. По 316 исходным высотам путем гармонического анализа до степени 13 в работе [3] были определены основные глобальные характеристики лунной фигуры: смещение центра фигуры относительно центра масс вдоль оси, направленной к Земле, вдоль экваториальной оси вращения, сжатие лунного эллипсоида и положение его центральных осей относительно осей Кассини. Одновременно определяли средние квадратические ошибки аппроксимации высот, дисперсионные характеристики, строили корреляционные кривые высот рельефа и карту высот. Как видно из таблицы ошибок аппроксимации исходных высот с помощью разложения по сферическим функциям (табл. 2 из работы [3]), ошибки при $N=8$ для видимой стороны достигают значений ошибок исходных данных. Следовательно, для получения указанных выше характеристик можно ограничиться восьмым порядком разложения по выборочным функциям. Причем полученные характеристики, корреляционные кривые высот рельефа, карта высот по детальности и по характеру поведения изолиний, полученные на основе разложения по 81 выборочной точке, близки к аналогичным характеристикам, полученным на основании разложения по сферическим функциям до $N=13$ (табл. 1—6, рис. 1—8 [3]). Результаты такого сравнения, кроме доказательства двух эквивалентных разложения, дают возможность предположить, что использование аппарата выборочных функций позволит уменьшить порядок разложения изучаемых величин.

4. Хотя разложение по выборочным функциям в окончательном виде и эквивалентно разложению по сферическим, аппарат выборочных функций способствует получению оптимального разложения по сферическим функциям (табл. 7 [3]) как с точки зрения простоты его определения, так и с точки зрения его качественных характеристик.

5. Однако следует отметить, что, несмотря на ряд преимуществ использования функций при описании характеристик Луны и других планет, получить значения изучаемых величин непосредственно в выборочных точках весьма трудно.

Заметим, что выборочные функции на сфере были введены в трудах [6—10] по аналогии с выборочными функциями, используемыми в теории случайных процессов [4]. Однако изучаемые там свойства фактически в геодезии пока не используются. В связи с этим вспомним, что в работе [10] отмечена связь теории выборочных функций и с теорией интерполирования, из которой вытекают основные свойства выборочных функций. Учитывая, что основная задача интерполирования функций может рассматриваться как частный случай смешанной задачи теории приближения функций [2] при $k=n$ (k — число узлов интерполирования, n — «степень» обобщенного полинома, т. е. линейной комбинации n функций ортонормированной и полной в некоторой заданной односвязной области τ системы $\{\omega_i\}$)

имеет смысл в данном случае воспользоваться результатами статьи [2].

Из указанной там теоремы при $k=n$ следует:

$$D=(W^T)^{-1}\cdot F, \tag{12}$$

$$D=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}=D_{n,\,1};\quad F=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}=F_{n,\,1};\quad f^{(n)}=\sum_{i=1}^{n} d_i\,\omega_i;$$

$$W=(\omega_{ij})_{n,\,n}=\begin{pmatrix} \omega_{11}, & \omega_{12}, \ldots, & \omega_{1n} \\ \omega_{21}, & \omega_{22}, \ldots, & \omega_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{n1}, & \omega_{n2}, \ldots, & \omega_{nn} \end{pmatrix}.$$

Здесь D — вектор-столбец искомых коэффициентов в представлении функций $f\in L^2_\tau$ по системе $\{\omega_i\}$; F — матрица-столбец заданных значений функции f в узлах; W — основная матрица задачи, где ω_{ij} — значение i-й функции системы $\{\omega_i\}$ в j-м узле.

Введем обозначения:

$$\Phi=(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)=\Phi_{1,\,n};\quad A=(W^T)=(\omega_{ji})_{n,\,n}.$$

Здесь Φ — матрица-строка первых используемых функций системы $\{\omega_i\}$; T — индекс трансформирования. Тогда

$$f^{(n)}=\Phi_{1,\,n}\cdot D_{n,\,1}=\Phi_{1,n}\cdot A^{-1}_{n,\,n}\cdot F_{n,\,1}. \tag{13}$$

Учитывая, что

$$A^{-1}=\frac{\Omega_{ij}}{\Delta},$$

где Ω_{ij} — союзная матрица, $\Delta=\det A$, и обозначая

$$Z_{1,\,n}=\Phi_{1,\,n}\cdot A^{-1}_{n,\,n}, \tag{14}$$

получаем

$$f^{(n)}=Z_{1,\,n}\cdot F_{n,\,1}, \tag{15}$$

где $Z_{1,n}=(Z_1, Z_2,\ldots, Z_n$ — матрица-строка выборочных функций.

Таким образом, формула (15) дает в матричном виде разложение функций f (высот $H(\varphi,\lambda)$, потенциала силы тяжести $V(r,\varphi,\lambda)$, ...) по применяемым выборочным функциям $\{Z_i\}$ соответствующим исходной ортонормированной системе $\{\omega_i\}$. Отсюда легко вывести основные свойства выборочных функций, приведенная трактовка которых полезна как при решении отдельных практических задач геодезии, так и при использовании упомянутой теоремы из статьи [2].

Список литературы: 1. *Дрожинер А.* Некоторые замечания о разложении геопотенциала в ряд выборочных функций. — Наблюдения ИСЗ/Тр. семинара «Динамические вопросы спутниковой геодезии», М., 1974, № 13. 2. *Мещеряков Г. А.* Про одну змішану задачу теорії наближення функцій. — Доповіді

АН УРСР, Київ, 1974, № 12, 3. *Чуйкова Н. А.* Геометрическая фигура Луны, представленная в виде разложения по сферическим и выборочным функциям. — Астрономический журнал, 1975, т. 52, вып. 6. 4. *Brillouin L.* Science and Information Theory. Academic Press, New York, 1962. 5. *Hebb K., Mair S. G.* Numerical definition of localized functions of a sphere. — SAO Sp. Rep., 1969, No 294. 6. *Lundquist C. A., Giacaglia G. E. O.* Possible geopotential improvement from satellite altimetry. — SAO Sp. Rep, 1969, No 294. 7. *Lundquist C. A., Giacaglia G. E. O. A* geopotentive representation with sampling functions. — The Use of Artificial Satellites for Geodesy. Ed. by S. W. Henripsen, A. Mancini, and B. H. Chovitz. Geophy. Mono 15, AMER. Geophys Union Washington. D. C. 1971, April. 8. *Lundquist C. A., Giacaglia G. E. O.* Sampling functions as an alternative to spherical harmonics. — Sp. Proc. of IAU Symposium, Rotation of the Earth, ed. by S. Yumi, Sasaki, Printing and Publ. Co, Sendai, Japan, Morioka, 1971, May, No 48. 9. *Lundqust C. A., Giacaglia G. E. O.* Use of altimetry data in a sampling functions approuch to geoid. — Sea Surface Topography From. Space, vol. I, ed. by Apel, NOAA Tech. Rep. ERL 228 — AOML7, US. Government printing office, Washington, D. T. 20402, 1971, October. 10. *Lundquist C. A., Giacaglia G. E. O.* Sampling functions for geophysics. — SAO Sp. Rep, 1972, No 344. 11. *Schmidt H. F.* Darstellung des Geoidpotentials mit Hilfe von «Sampling Functions».— Veröff. Bayer Kommiss. Int. Erdmes Bayer Akad. Wiss. Astron.— Geod. Arb., 1973, No 30. 12. *Schmidt H. F.* Trigonometrische Interpolation mittels «Sampling Functions». — Zeitschrift für Vermessungswesen, März, 1974, Heft 3. 13. *Schmidt H. F.* Möglichkeiten zur Erstellung von Erdmodellen mit Hilfe der Sampling Funktionen. — Zeitschrift für Vermessungswessen März, 1974, Heft 3. 14. *Schmidt H. F.* Die Bestimmung der Koeffizienten der Sampling Funktionen. — Veröff. Boyer Kommis. Int. Erdmess Bayer Akad. Wiss. Astron. — Geod. Arb., 1974, No 32. 15. Veröff. Boyer Kommis. Int. Erdmess Bayer Akad. Wiss. Astron. — Geod. Arb., 1974, No 35.

Работа поступила в редколлегию 11 января 1978 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.

УДК 528.33.35

В. В. ЛОЗИНСКИЙ
Львовский государственный университет

ОШИБКА ДИРЕКЦИОННОГО УГЛА СВЯЗУЮЩИХ СТОРОН РЯДОВ ИЗ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Распределение погрешностей в линейно-угловых рядах, состоящих из треугольников и геодезических четырехугольников различной формы, в основном изучено [1, 3, 4]. Ряды из центральных систем, представляющие большой практический интерес при создании астрономо-геодезических сетей, исследованы в работе [2], однако имеет смысл рассмотреть их более детально.

Цель настоящей работы — изучение распределения ошибок в свободных рядах линейно-угловой триангуляции. Получена формула для подсчета обратных весов функции дирекционного