АН УРСР, Київ, 1974, № 12, 3. *Чуйкова Н. А.* Геометрическая фигура Луны, представленная в виде разложения по сферическим и выборочным функциям. — Астрономический журнал, 1975, т. 52, вып. 6. 4. *Brillouin L.* Science and Information Theory. Academic Press, New York, 1962. 5. *Hebb K., Mair S. G.* Numerical definition of localized functions of a sphere. — SAO Sp. Rep., 1969, No 294. 6. *Lundquist C. A., Giacaglia G. E. O.* Possible geopotential improvement from satellite altimetry. — SAO Sp. Rep, 1969, No 294. 7. *Lundquist C. A., Giacaglia G. E. O. A* geopotentive representation with sampling functions. — The Use of Artificial Satellites for Geodesy. Ed. by S. W. Henripsen, A. Mancini, and B. H. Chovitz. Geophy. Mono 15, AMER. Geophys Union Washington. D. C. 1971, April. 8. *Lundquist C. A., Giacaglia G. E. O.* Sampling functions as an alternative to spherical harmonics. — Sp. Proc. of IAU Symposium, Rotation of the Earth, ed. by S. Yumi, Sasaki, Printing and Publ. Co, Sendai, Japan, Morioka, 1971, May, No 48. 9. *Lundqust C. A., Giacaglia G. E. O.* Use of altimetry data in a sampling functions approuch to geoid. — Sea Surface Topography From. Space, vol. I, ed. by Apel, NOAA Tech. Rep. ERL 228 — AOML7, US. Government printing office, Washington, D. T. 20402, 1971, October. 10. *Lundquist C. A., Giacaglia G. E. O.* Sampling functions for geophysics. — SAO Sp. Rep, 1972, No 344. 11. *Schmidt H. F.* Darstellung des Geoidpotentials mit Hilfe von «Sampling Functions».— Veröff. Bayer Kommiss. Int. Erdmes Bayer Akad. Wiss. Astron.— Geod. Arb., 1973, No 30. 12. *Schmidt H. F.* Trigonometrische Interpolation mittels «Sampling Functions». — Zeitschrift für Vermessungswesen, März, 1974, Heft 3. 13. *Schmidt H. F.* Möglichkeiten zur Erstellung von Erdmodellen mit Hilfe der Sampling Funktionen. — Zeitschrift für Vermessungswessen März, 1974, Heft 3. 14. *Schmidt H. F.* Die Bestimmung der Koeffizienten der Sampling Funktionen. — Veröff. Boyer Kommis. Int. Erdmess Bayer Akad. Wiss. Astron. — Geod. Arb., 1974, No 32. 15. Veröff. Boyer Kommis. Int. Erdmess Bayer Akad. Wiss. Astron. — Geod. Arb., 1974, No 35.

Работа поступила в редколлегию 11 января 1978 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.

УДК 528.33.35

В. В. ЛОЗИНСКИЙ
Львовский государственный университет

ОШИБКА ДИРЕКЦИОННОГО УГЛА СВЯЗУЮЩИХ СТОРОН РЯДОВ ИЗ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Распределение погрешностей в линейно-угловых рядах, состоящих из треугольников и геодезических четырехугольников различной формы, в основном изучено [1, 3, 4]. Ряды из центральных систем, представляющие большой практический интерес при создании астрономо-геодезических сетей, исследованы в работе [2], однако имеет смысл рассмотреть их более детально.

Цель настоящей работы — изучение распределения ошибок в свободных рядах линейно-угловой триангуляции. Получена формула для подсчета обратных весов функции дирекционного угла связующих сторон ряда из центральных систем, образован-ных равносторонними треугольниками с измеренными углами и сторонами. Ряд уравнен за условия фигур, сторон и горизонта (рисунок).

При уравнивании ряда по методу условных измерений возникает $4N+2$ условных уравнений фигур (N — число центральных систем в ряду) вида [2]

$$(3i-2)+(3i-1)+(3i)+w_{\text{ф}}=0, \qquad (1)$$

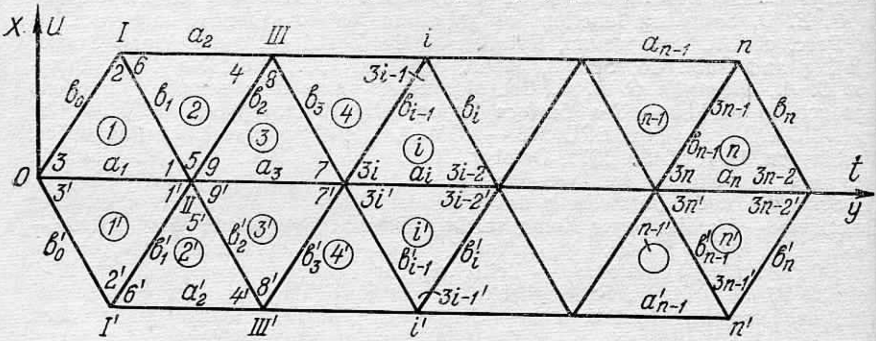

Схема линейно-углового ряда из центральных систем.

$8N+4$ синусных условных уравнений

$$-\delta(3i-2)+\delta(3i-1)+\left(\frac{(b_{i-1})}{b_{i-1}}\right)-\left(\frac{(a_i)}{a_i}\right)+w_a=0; \qquad (2)$$

$$-\delta(3i-2)+\delta(3i)+\left(\frac{(b_{i-1})}{b_{i-1}}\right)-\left(\frac{(b_i)}{b_i}\right)+w_b=0; \qquad (3)$$

и N условных уравнений горизонта

$$(3i-2)+(3i-1)+(3i)+(3i)'+(3i-1)'+(3i-2)'+w_c=0, \qquad (4)$$

где i — порядковый номер треугольника в верхнем ряду; $(3i)$, $(3i-1)$, $(3i-2)$ — вероятнейшие поправки в углы, выраженные в радианах; (a_i), (b_i), (b_{i-1}) — вероятнейшие поправки в измеренные стороны; $\delta=\text{ctg}$, угла треугольника; w — свободные члены условных уравнений. Заметим, что в нижнем ряду треугольников углы обозначают теми же числами, что и в верхнем, но только со штрихами (см. рисунок).

Весовую функцию дирекционного угла связующей стороны треугольника верхнего ряда запишем в виде

$$dF_{\alpha_n}=\sum_{i=1}^{n}(3i-1)(-1)^i, \qquad (5)$$

где n — число треугольников в верхнем ряду.

Вероятнейшие поправки в углы и относительные поправки в длины сторон для данного класса линейно-угловой триангуляции имеют один и тот же порядок малости. Поэтому погрешности угловых измерений и относительные линейные погрешности будем считать равноточными.

Решение нормальных уравнений выполняли методом двух групп. В первую группу включали условные уравнения фигур вида (1), во вторую — все остальные условные уравнения. Преобразованные коэффициенты условных уравнений второй группы вычисляли по известным зависимостям [4]:

$$a_i = a_i' - \frac{[a_i']}{3} \text{ — (при поправках в углы);}$$

$a_i = a_i'$ (при поправках в стороны).

Условные уравнения горизонта после преобразования имеют вид

$$\frac{1}{3}[2(3i-2)-(3i-1)-(3i)]+\frac{1}{3}[-(3i-2)+$$

$$+2(3i-1)-(3i)]+\frac{1}{3}[-(3i-2)-(3i-1)+2(3i)]+$$

$$+\frac{1}{3}[2(3i-2)'-(3i-1)'-(3i)']+\frac{1}{3}[-(3i-2)'+$$

$$+2(3i-1)'-(3i)']+\frac{1}{3}[-(3i-2)'-(3i-1)'+2(3i)']+w_c=0, \tag{6}$$

а уравнение весовой функции дирекционного угла выглядит так:

$$dF_{\alpha_n} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}[-(3i-2)+2(3i-1)-(3i)](-1)^i. \tag{7}$$

Преобразованные коэффициенты условных уравнений второй группы вида (2), (3), (6) обозначим соответственно через a_i, b_i и c_J, а коэффициенты весовой функции через f_α. Здесь $I=1, 2, 3, \dots, N$.

Коэффициенты нормальных уравнений имеют вид:

$$[a_i a_i] = 2{,}6667;\ [a_i b_i] = [a_i' b_i'] = 1{,}3333;\ [a_{i+1} b_i] =$$

$$= [a'_{i+1} b_i'] = -1;\ [a_i f_\alpha] = (-1)^i\, 0{,}5774;$$

$$[a_i a_i'] = 1 \text{ при } i = 1, 3, 5, \dots; \tag{8}$$

$[a_i c_I] = -0{,}5774$ при $i = 1, 3, 5, \dots$ и соответственно $j = 1, 2, 3, \dots$;

$$[a_i c_I] = [a_i' c_I] = 0{,}5774 \text{ при } i = 2, 4, 6, \dots \text{ и } I = 1, 2, 3, \dots.$$

Далее:

$$[a_i' a_i'] = [b_i b_i] = [b_i' b_i'] = 2{,}6667;\ [b_i b_{i+1}] = [b_i' b'_{i+1}] = -$$

$$[a_i' c_I] = [b_i c_I] = [b_i' c_I] = -0{,}5774 \text{ при } i = 1, 3, 5, \ldots \text{ и } I = 1, 2, 3, \ldots$$

$$[b_i c_I] = [b_i' c_I] = 0{,}5774 \text{ при } i = 3, 5, 7, \ldots \text{ и } I = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$[c_I c_I] = 4;\ [c_I c_{I+1}] = -\frac{2}{3};\ [c_I f^\alpha] = \frac{4}{3};\ [f_\alpha f_\alpha] = \frac{2}{3} n.$$

Первые n синусных уравнений (2) для верхнего ряда треугольников не имеют общих поправок, поэтому при исключении по схеме Гаусса коэффициенты (8) n первых нормальных уравнений не изменяются. Остальные коэффициенты преобразованной системы условных уравнений будут иметь вид:

$$[a_i' a_i' (n + i - 1)] = 2{,}2917;\ [a_i b_i (n + i - 1)] = -0{,}5;$$

$$[a_i' b_{i-1} (n + i - 1)] = 0{,}375;\ [a_i' c_I (n + i - 1)] = -0{,}3608;$$

$$[a_i' f_\alpha (n + i - 1)] = 0{,}2165. \qquad (10)$$

Для приведенных выше коэффициентов $i = 1, 3, 5, \ldots;\ J = 1,$ 2, 3, ... Далее, для нечетных i

$$[b_i b_{i+1} (2n + i - 1)] = -0{,}5, \qquad (11)$$

для четных i

$$[b_i b_{i+1} (2n + i - 1)] = -0{,}4182.$$

Запишем квадратические коэффициенты уравнений вида (3) для верхнего ряда треугольников

$$[b_1 b_1 \cdot 2n] = B_1, \text{ где } B_1 = 1{,}5159; \qquad (12)$$

$$[b_2 b_2 (2n + 1)] = Y - \frac{0{,}25}{B_1}, \text{ где } Y = 1{,}5636. \qquad (13)$$

Все последующие квадратические коэффициенты уравнений (3), кроме последнего, можно определить с точностью порядка до 1—3% из выражений:

$$[b_i b_i (2n + i - 1)] = Y - \frac{0{,}25}{B} \text{ — для четных } i;$$

$$[b_i b_i (2n + i - 1)] = B_1 - \frac{0{,}1749}{B} \text{ — для нечетных } i, \qquad (14)$$

где $B = 1{,}3879$.

Последний квадратический коэффициент уравнений вида (3)

$$[b_n b_n (3n - 1)] = 1{,}7649. \qquad (15)$$

Неквадратические коэффициенты уравнений (3) для нижнего ряда треугольников после преобразований для нечетных i имеют вид

$$[b_i' b_{i+1}' (3n + i - 1)] = -0{,}5 - \frac{0{,}0238}{B_1 B} + \frac{0{,}0142}{B_1 B^3} \cdots\cdots$$

Влияние в данном выражении второго, третьего и последующих членов на определение неквадратического коэффициента выражается ошибкой, не превышающей 1,5% значения коэффициента, поэтому этими членами можно пренебречь. Тогда

$$[b_i' b_{i+1}' (3n + i - 1)] = -0{,}5. \qquad (16)$$

Неквадратические коэффициенты уравнений (3) для нижнего ряда треугольников (для четных i)

$$[b_i' b_{i+1}' (3n + i - 1)] = -0{,}359. \qquad (17)$$

Выражения (16), (17) справедливы для $i < n-1$, но при $i = n-1$

$$[b_{n-1}' b_n' (4n - 2)] = -0{,}3679. \qquad (18)$$

Квадратические коэффициенты уравнений вида (3) для нижнего ряда треугольников можно представить выражениями

$$[b_1' b_1' \cdot 3n] = 1{,}4528; \ [b_2' b_2' (3n + 1)] = 1{,}344. \qquad (19)$$

В общем виде с ошибкой не более 0,5% примем:
для нечетных i при $3 \leqslant i < n$

$$[b_i' b_i' (3n + i - 1)] = B_1 - 0{,}173, \qquad (20)$$

для четных i при $2 < i < n$

$$[b_i' b_i' (3n + i - 1)] = Y - 0{,}232.$$

Следует отметить, что при $N > 1$ для $i = n-1$ квадратический коэффициент этого вида уравнений будет:

$$[b_{n-1}' b_{n-1}' (4n - 2)] = 1{,}3377. \qquad (21)$$

Последний квадратический коэффициент с допустимой точностью будет

$$[b_n' b_n' (4n - 1)] = 1{,}727. \qquad (22)$$

Неквадратические коэффициенты уравнений вида (3) и (6) для верхнего ряда треугольников первой центральной системы выразятся следующими выражениями:

$$[b_1 c_1 \cdot 2n] = E_{1-1} = -0{,}1509;$$

$$[b_2 c_1 (2n + 1)] = E_{2-1} = -0{,}2887 - 0{,}5 \frac{E_{1-1}}{B_1};$$

$$[b_3 c_1 (2n + 2)] = E_{3-1} = 0{,}5774 - 0{,}4182 \frac{E_{2-1}}{B}. \qquad (23)$$

Далее в общем виде (причем ошибка в значениях коэффициентов не превысит 1%) для четных i при $i \geqslant 4$

$$[b_i c_1 (2n + i - 1)] = 0{,}5 \frac{E_{(i-1)-1}}{B}, \qquad (24)$$

для нечетных i при $i > 3$

$$[b_i c_1 (2n + i - 1)] = 0{,}4182 \frac{E_{(i-1)-1}}{B},$$

$$\text{где } E_{(i-1)-1} = [b_{i-1} c_1 (2n + i - 2)].$$

Для последующих центральных систем неквадратические коэффициенты уравнений (3) и (6) имеют вид:
для $i = 2, 4, 6, \ldots, J = 2, 3, 4, \ldots$.

$$[b_i c_J (2n + i - 1)] = -0{,}1575 = E_{1-J};$$

для $i = 3, 5, 7, \ldots, J = 2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i c_J (2n + i - 1)] = E_{1-1} - 0{,}4182 \frac{E_{1-J}}{B} = E_{2-J};$$

для $i = 4, 6, 8, \ldots, J = 2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i c_J (2n + i - 1)] = -0{,}2887 - 0{,}5 \frac{E_{2-J}}{B} = E_{3-J}; \qquad (25)$$

для $i = 5, 7, 9, \ldots, J = 2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i c_J (2n + i - 1)] = 0{,}5774 - 0{,}4182 \frac{E_{3-J}}{B}.$$

В общем виде:
для $i = 6, 8, 10, \ldots, J = 2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i c_J (2n + i - 1)] = 0{,}5 \frac{E_{(i-1)-J}}{B}; \qquad (26)$$

для $i = 7, 9, 11, \ldots, j = 2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i c_J (2n + i - 1)] = 0{,}4182 \frac{E_{(i-1)-J}}{B},$$

где $E_{(i-1)-J} = [b_{i-1} c_J (2n + i - 2)]$.

После ряда преобразований неквадратические коэффициенты уравнений (3) и (6) для нижнего ряда треугольников можно приближенно представить следующим образом:

$$[b_1' c_1 \cdot 3n] = -0{,}11, \quad [b_2' c_1 (3n + 1)] = -0{,}22$$

и в общем виде для $i \geqslant 3$

$$[b_i' c_1 (3n + i - 1)] = 0{,}5774 \frac{1{,}3333^{(i-2)}}{1{,}9522^{l}}, \qquad (27)$$

где $i = 3, 4, 5, \ldots$ и, соответственно, $l = 1, 3, 5, \ldots$.

Неквадратические коэффициенты уравнений типа (3) и (6) для последующих центральных систем ($N>1$) выразим таким образом:

для $i=1, 3, 5, \ldots$ и $J=2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i' c_J (3n+i-1] = 0{,}016;$$

для $i=2, 4, 6, \ldots$ и $J=2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i' c_J (3n+i-1)] = -0{,}168; \tag{28}$$

для $i=3, 5, 7, \ldots$ и $J=2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i' c_J (3n+i-1)] = -0{,}175;$$

для $i=4, 6, 8, \ldots$ и $J=2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i' c_J (3n+i-1)] = -0{,}25.$$

Все последующие коэффициенты этого вида при любом количестве центральных систем ($N>2$) с ошибкой, влияющей на точность определения квадратических коэффициентов уравнений горизонта (6) не более 0,5%, можно принять равными нулю.

Выражения для квадратических коэффициентов уравнений типа (6) очень громоздкие, поэтому после ряда преобразований с ошибкой, не превышающей 1—3%, их можно представить следующим образом:

$$[c_1 c_1 \cdot 4n] = C_1; \; [c_I c_I (4n + I - 1)] = C_1 - \frac{0{,}3333}{C_{I-1}}, \tag{29}$$

где $C_1 = 3{,}127$, $C_{I-1} = [c_{I-1} c_{I-1} (4n + I - 2)]$.

Коэффициенты уравнений (3) и весовой функции дирекционного угла будут

$$[b_1 f_\alpha \cdot 2n] = D; \; [b_2 f_\alpha (2n+1)] = -D' + 0{,}5 \frac{D}{B_1},$$

где $D=0{,}5524$, $D'=0{,}5406$.

Далее для нечетных i

$$[b_i f_\alpha (2n+i-1)] \Big|_{i=3}^{i=n-1} = D - 0{,}4182 \frac{[b_{i-1} f_\alpha (2n+i-2)]}{B}; \tag{30}$$

для четных i

$$[b_i f_\alpha (2n+i-1)] \Big|_{i=3}^{i=n-1} = -D' + 0{,}5 \frac{[b_{i-1} f_\alpha (2n+i-2)]}{B}.$$

Формулы (30) справедливы для $i<n$, но при $i=n$

$$[b_n f_\alpha (3n-1)] = 0{,}3359 - 0{,}4182 \frac{[b_{n-1} f_\alpha (3n-2)]}{B}. \tag{31}$$

Для нижнего ряда треугольников эти же коэффициенты для нечетных i

$$[b_i' f_\alpha(3n+i-1)] = -0{,}21; \qquad (32)$$

для четных i $\quad [b_i' f_\alpha(3n+i-1)] = 0{,}1.$

Определение значений обратных весов $\frac{1}{P_\alpha}$

N	По схеме Гаусса	По формуле (37)	Погрешность, %
1	0,8496	0,8525	0,34
2	1,1498	1,1362	1,18
3	1,4327	1,4199	0,89
4	1,7167	1,7036	0,76
5	2,0020	1,9837	0,74
6	2,2876	2,2710	0,73

Последний коэффициент уравнений (3) и весовой функции дирекционного угла имеет вид

$$[b_n' f_\alpha(4n-1)] = -0{,}1886. \qquad (33)$$

Для уравнений типа (6) и весовой функции можно принять, что

$$[c_1 f_\alpha \cdot 4n] = 1{,}042. \qquad (34)$$

Затем в общем виде для $N \geqslant 2$

$$[c_I f_\alpha (4n + I - 1)] = 1{,}3333 - \frac{0{,}3889}{1{,}3333^{(I+1)}}. \qquad (35)$$

Обратный вес функции дирекционного угла связующих сторон ряда из центральных систем определится по формуле

$$\frac{1}{P_\alpha} = [f_\alpha f_\alpha] - \sum_1^n \frac{[a_i f_\alpha (i-1)]^2}{[a_i a_i (i-1)]} - \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n} \frac{[a_i' f_\alpha (n+i-1)]^2}{[a_i' a_i' (n+i-1)]} -$$

$$- \sum_1^n \frac{[b_i f_\alpha (2n+i-1)]^2}{[b_i b_i (2n+i-1)]} - \sum_1^n \frac{[b_i' f_\alpha (3n+i-1)]^2}{[b_i' b_i' (3n+i-1)]} -$$

$$- \sum_1^I \frac{[c_I f_\alpha (4n+I-1)]^2}{[c_I c_I (4n+I-1)]}. \qquad (36)$$

Выражение (36) после подстановок и простых вычислений имеет вид

$$\frac{1}{P_\alpha} = 0{,}2837\, N + 0{,}5688. \qquad (37)$$

Проверка формулы (37) на теоретических моделях показала, что этой формулой можно пользоваться для вычисления обратных весов функции дирекционных углов для любых значений N. Результаты проверки приведены в таблице.

Список литературы: 1. *Корницкий Ю. Н.* Оценка точности элементов линейно-углового ряда, состоящего из геодезических квадратов, проложенного между исходными пунктами. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1974, вып. 19. 2. *Монин И. Ф.* Предвычисление точности рядов из центральных систем линейно-угловой триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1976, вып. 24. 3. *Новосельская В. П.* Точность цепи линейно-угловой триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1964, вып. 1. 4. *Проворов К. Л.* Точность цепи триангуляции с измеренными сторонами и углами. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1959, № 3.

Работа поступила в редколлегию 6 декабря 1977 года. Рекомендована кафедрой геоморфологии Львовского госуниверситета.

УДК 528.33.35

В. В. ЛОЗИНСКИЙ
Львовский государственный университет

ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОГО РЯДА ИЗ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИСТЕМ

При уравнивании свободного ряда линейно-угловой триангуляции по методу условных измерений (рисунок) возникает $4N+2$ условных уравнений фигур (N— число центральных систем в ряду) вида [1]

$$(3i-2)+(3i-1)+(3i)+w_{\Phi}=0, \qquad (1)$$

$8N+4$ синусных условных уравнений

$$-\delta(3i-2)+\delta(3i-1)+\left(\frac{(b_{i-1})}{b_{i-1}}\right)-\left(\frac{(a_i)}{a_i}\right)+w_a=0; \qquad (2)$$

$$-\delta(3i-2)+\delta(3i)+\left(\frac{(b_{i-1})}{b_{i-1}}\right)-\left(\frac{(b_i)}{b_i}\right)+w_b=0 \qquad (3)$$

и N условных уравнений горизонта

$$(3i-2)+(3i-1)+(3i)+(3i)'+(3i-1)'+(3i-2)'+w_c=0, \qquad (4)$$

где i — порядковый номер треугольника в верхнем ряду; $(3i)$, $(3i-1)$, $(3i-2)$ — вероятнейшие поправки в углы, выраженные в радианах (в нижнем ряду треугольников углы обозначаются теми же числами, что и в верхнем, но только со штрихами);