УДК 528.33.35

В. В. ЛОЗИНСКИЙ
Львовский государственный университет

ОШИБКА ДИРЕКЦИОННОГО УГЛА СВЯЗУЮЩИХ СТОРОН РЯДОВ ИЗ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Распределение погрешностей в линейно-угловых рядах, состоящих из треугольников и геодезических четырехугольников различной формы, в основном изучено [1, 3, 4]. Ряды из центральных систем, представляющие большой практический интерес при создании астрономо-геодезических сетей, исследованы в работе [2], однако имеет смысл рассмотреть их более детально.

Цель настоящей работы — изучение распределения ошибок в свободных рядах линейно-угловой триангуляции. Получена формула для подсчета обратных весов функции дирекционного угла связующих сторон ряда из центральных систем, образован ных равносторонними треугольниками с измеренными углам и сторонами. Ряд уравнен за условия фигур, сторон и горизонт (рисунок).

При уравнивании ряда по методу условных измерений воз никает $4N+2$ условных уравнений фигур (N — число централь ных систем в ряду) вида [2]

$$(3i-2)+(3i-1)+(3i)+w_{\text{ф}}=0, \tag{1}$$

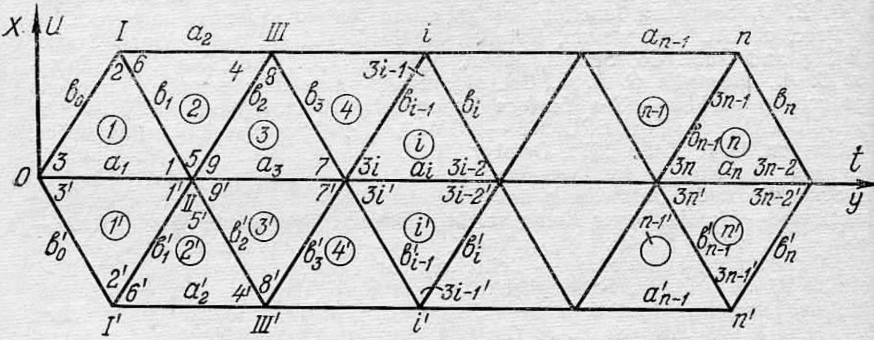

Схема линейно-углового ряда из центральных систем.

$8N+4$ синусных условных уравнений

$$-\delta(3i-2)+\delta(3i-1)+\left(\frac{(b_{i-1})}{b_{i-1}}\right)-\left(\frac{(a_i)}{a_i}\right)+w_a=0; \tag{2}$$

$$-\delta(3i-2)+\delta(3i)+\left(\frac{(b_{i-1})}{b_{i-1}}\right)-\left(\frac{(b_i)}{b_i}\right)+w_b=0; \tag{3}$$

и N условных уравнений горизонта

$$(3i-2)+(3i-1)+(3i)+(3i)'+(3i-1)'+(3i-2)'+w_c=0, \tag{4}$$

где i — порядковый номер треугольника в верхнем ряду; $(3i)$, $(3i-1)$, $(3i-2)$ — вероятнейшие поправки в углы, выраженные в радианах; (a_i), (b_i), (b_{i-1}) — вероятнейшие поправки в измеренные стороны; $\delta=\mathrm{ctg}$, угла треугольника; w — свободные члены условных уравнений. Заметим, что в нижнем ряду треугольников углы обозначают теми же числами, что и в верхнем, но только со штрихами (см. рисунок).

Весовую функцию дирекционного угла связующей стороны треугольника верхнего ряда запишем в виде

$$dF_{\alpha_n}=\sum_{i=1}^{n}(3i-1)(-1)^i, \tag{5}$$

где n — число треугольников в верхнем ряду.

Вероятнейшие поправки в углы и относительные поправки в длины сторон для данного класса линейно-угловой триангуляции имеют один и тот же порядок малости. Поэтому погрешности угловых измерений и относительные линейные погрешности будем считать равноточными.

Решение нормальных уравнений выполняли методом двух групп. В первую группу включали условные уравнения фигур вида (1), во вторую — все остальные условные уравнения. Преобразованные коэффициенты условных уравнений второй группы вычисляли по известным зависимостям [4]:

$$a_i = a_i' - \frac{[a_i']}{3} \text{ — (при поправках в углы);}$$

$a_i = a_i'$ (при поправках в стороны).

Условные уравнения горизонта после преобразования имеют вид

$$\frac{1}{3}[2(3i-2)-(3i-1)-(3i)]+\frac{1}{3}[-(3i-2)+$$
$$+2(3i-1)-(3i)]+\frac{1}{3}[-(3i-2)-(3i-1)+2(3i)]+$$
$$+\frac{1}{3}[2(3i-2)'-(3i-1)'-(3i)']+\frac{1}{3}[-(3i-2)'+$$
$$+2(3i-1)'-(3i)']+\frac{1}{3}[-(3i-2)'-(3i-1)'+2(3i)']+w_c=0, \tag{6}$$

а уравнение весовой функции дирекционного угла выглядит так:

$$dF_{\alpha_n} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}[-(3i-2)+2(3i-1)-(3i)](-1)^i. \tag{7}$$

Преобразованные коэффициенты условных уравнений второй группы вида (2), (3), (6) обозначим соответственно через a_i, b_i и c_J, а коэффициенты весовой функции через f_α. Здесь $I=1, 2, 3, \ldots, N$.

Коэффициенты нормальных уравнений имеют вид:

$$[a_i a_i] = 2{,}6667;\ [a_i b_i] = [a_i' b_i'] = 1{,}3333;\ [a_{i+1} b_i] =$$
$$= [a_{i+1}' b_i'] = -1;\ [a_i f_\alpha] = (-1)^i\, 0{,}5774;$$
$$[a_i a_i'] = 1 \text{ при } i = 1, 3, 5, \ldots; \tag{8}$$

$[a_i c_I] = -0{,}5774$ при $i = 1, 3, 5, \ldots$ и соответственно $j=1, 2, 3, \ldots$;

$[a_i c_I] = [a_i' c_I] = 0{,}5774$ при $i = 2, 4, 6, \ldots$ и $I = 1, 2, 3, \ldots$.

Далее:

$$[a_i' a_i'] = [b_i b_i] = [b_i' b_i'] = 2{,}6667;\ [b_i b_{i+1}] = [b_i' b_{i+1}'] = -$$

$$[a_i' c_I] = [b_i c_I] = [b_i' c_I] = -0{,}5774 \text{ при } i = 1, 3, 5, \ldots \text{ и } I = 1, 2, 3, \ldots$$

$$[b_i c_I] = [b_i' c_I] = 0{,}5774 \text{ при } i = 3, 5, 7, \ldots \text{ и } I = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$[c_I c_I] = 4;\ [c_I c_{I+1}] = -\frac{2}{3};\ [c_I f^\alpha] = \frac{4}{3};\ [f_\alpha f_\alpha] = \frac{2}{3} n.$$

Первые n синусных уравнений (2) для верхнего ряда тре-угольников не имеют общих поправок, поэтому при исключени[и] по схеме Гаусса коэффициенты (8) n первых нормальных урав-нений не изменяются. Остальные коэффициенты преобразован-ной системы условных уравнений будут иметь вид:

$$[a_i' a_i' (n + i - 1)] = 2{,}2917;\ [a_i b_i (n + i - 1)] = -0{,}5;$$

$$[a_i' b_{i-1} (n + i - 1)] = 0{,}375;\ [a_i' c_I (n + i - 1)] = -0{,}3608;$$

$$[a_i' f_\alpha (n + i - 1)] = 0{,}2165. \qquad (10)$$

Для приведенных выше коэффициентов $i = 1, 3, 5, \ldots;\ J = 1,$ $2, 3, \ldots$ Далее, для нечетных i

$$[b_i b_{i+1} (2n + i - 1)] = -0{,}5, \qquad (11)$$

для четных i

$$[b_i b_{i+1} (2n + i - 1)] = -0{,}4182.$$

Запишем квадратические коэффициенты уравнений вида (3) для верхнего ряда треугольников

$$[b_1 b_1 \cdot 2n] = B_1, \text{ где } B_1 = 1{,}5159; \qquad (12)$$

$$[b_2 b_2 (2n + 1)] = Y - \frac{0{,}25}{B_1}, \text{ где } Y = 1{,}5636. \qquad (13)$$

Все последующие квадратические коэффициенты уравнений (3), кроме последнего, можно определить с точностью порядка до 1—3% из выражений:

$$[b_i b_i (2n + i - 1)] = Y - \frac{0{,}25}{B} \text{ — для четных } i;$$

$$[b_i b_i (2n + i - 1)] = B_1 - \frac{0{,}1749}{B} \text{ — для нечетных } i, \qquad (14)$$

где $B = 1{,}3879$.

Последний квадратический коэффициент уравнений вида (3)

$$[b_n b_n (3n - 1)] = 1{,}7649. \qquad (15)$$

Неквадратические коэффициенты уравнений (3) для нижнего ряда треугольников после преобразований для нечетных i имеют вид

$$[b_i' b_{i+1}'(3n+i-1)] = -0{,}5 - \frac{0{,}0238}{B_1 B} + \frac{0{,}0142}{B_1 B^3} \cdots .$$

Влияние в данном выражении второго, третьего и последующих членов на определение неквадратического коэффициента выражается ошибкой, не превышающей 1,5% значения коэффициента, поэтому этими членами можно пренебречь. Тогда

$$[b_i' b_{i+1}'(3n+i-1)] = -0{,}5. \tag{16}$$

Неквадратические коэффициенты уравнений (3) для нижнего ряда треугольников (для четных i)

$$[b_i' b_{i+1}'(3n+i-1)] = -0{,}359. \tag{17}$$

Выражения (16), (17) справедливы для $i<n-1$, но при $i=n-1$

$$[b_{n-1}' b_n'(4n-2)] = -0{,}3679. \tag{18}$$

Квадратические коэффициенты уравнений вида (3) для нижнего ряда треугольников можно представить выражениями

$$[b_1' b_1' \cdot 3n] = 1{,}4528; \; [b_2' b_2'(3n+1)] = 1{,}344. \tag{19}$$

В общем виде с ошибкой не более 0,5% примем:
для нечетных i при $3 \leqslant i < n$

$$[b_i' b_i'(3n+i-1)] = B_1 - 0{,}173, \tag{20}$$

для четных i при $2<i<n$

$$[b_i' b_i'(3n+i-1)] = Y - 0{,}232.$$

Следует отметить, что при $N>1$ для $i=n-1$ квадратический коэффициент этого вида уравнений будет:

$$[b_{n-1}' b_{n-1}'(4n-2)] = 1{,}3377. \tag{21}$$

Последний квадратический коэффициент с допустимой точностью будет

$$[b_n' b_n'(4n-1)] = 1{,}727. \tag{22}$$

Неквадратические коэффициенты уравнений вида (3) и (6) для верхнего ряда треугольников первой центральной системы выразятся следующими выражениями:

$$[b_1 c_1 \cdot 2n] = E_{1-1} = -0{,}1509;$$

$$[b_2 c_1(2n+1)] = E_{2-1} = -0{,}2887 - 0{,}5\frac{E_{1-1}}{B_1};$$

$$[b_3 c_1(2n+2)] = E_{3-1} = 0{,}5774 - 0{,}4182\frac{E_{2-1}}{B}. \tag{23}$$

Далее в общем виде (причем ошибка в значениях коэффи-циентов не превысит 1%) для четных i при $i \geqslant 4$

$$[b_i c_1 (2n + i - 1)] = 0{,}5 \frac{E_{(i-1)-1}}{B}, \qquad (24)$$

для нечетных i при $i > 3$

$$[b_i c_1 (2n + i - 1)] = 0{,}4182 \frac{E_{(i-1)-1}}{B},$$

$$\text{где } E_{(i-1)-1} = [b_{i-1} c_1 (2n + i - 2)].$$

Для последующих центральных систем неквадратические коэффициенты уравнений (3) и (6) имеют вид:
для $i=2, 4, 6, \ldots, J=2, 3, 4, \ldots$.

$$[b_i c_I (2n + i - 1)] = -0{,}1575 = E_{1-I};$$

для $i=3, 5, 7, \ldots, J=2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i c_I (2n + i - 1)] = E_{1-1} - 0{,}4182 \frac{E_{1-I}}{B} = E_{2-I};$$

для $i=4, 6, 8, \ldots, J=2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i c_I (2n + i - 1)] = -0{,}2887 - 0{,}5 \frac{E_{2-I}}{B} = E_{3-I}; \qquad (25)$$

для $i=5, 7, 9, \ldots, J=2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i c_I (2n + i - 1)] = 0{,}5774 - 0{,}4182 \frac{E_{3-I}}{B}.$$

В общем виде:
для $i=6, 8, 10, \ldots, J=2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i c_I (2n + i - 1)] = 0{,}5 \frac{E_{(i-1)-I}}{B}; \qquad (26)$$

для $i=7, 9, 11, \ldots, j=2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i c_I (2n + i - 1)] = 0{,}4182 \frac{E_{(i-1)-I}}{B},$$

где $E_{(i-1)-I} = [b_{i-1} c_I (2n + i - 2)]$.

После ряда преобразований неквадратические коэффициенты уравнений (3) и (6) для нижнего ряда треугольников можно приближенно представить следующим образом:

$$[b_1' c_1 \cdot 3n] = -0{,}11, \quad [b_2' c_1 (3n + 1)] = -0{,}22$$

и в общем виде для $i \geqslant 3$

$$[b_i' c_1 (3n + i - 1)] = 0{,}5774 \frac{1{,}3333^{(i-2)}}{1{,}9522^{l}}, \qquad (27)$$

где $i=3, 4, 5, \ldots$ и, соответственно, $l=1, 3, 5, \ldots$.

Неквадратические коэффициенты уравнений типа (3) и (6) для последующих центральных систем ($N>1$) выразим таким образом:

для $i=1, 3, 5, \ldots$ и $J=2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i' c_J (3n+i-1] = 0{,}016;$$

для $i=2, 4, 6, \ldots$ и $J=2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i' c_J (3n+i-1)] = -0{,}168; \qquad (28)$$

для $i=3, 5, 7, \ldots$ и $J=2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i' c_J (3n+i-1)] = -0{,}175;$$

для $i=4, 6, 8, \ldots$ и $J=2, 3, 4, \ldots$

$$[b_i' c_J (3n+i-1)] = -0{,}25.$$

Все последующие коэффициенты этого вида при любом количестве центральных систем ($N>2$) с ошибкой, влияющей на точность определения квадратических коэффициентов уравнений горизонта (6) не более 0,5%, можно принять равными нулю.

Выражения для квадратических коэффициентов уравнений типа (6) очень громоздкие, поэтому после ряда преобразований с ошибкой, не превышающей 1—3%, их можно представить следующим образом:

$$[c_1 c_1 \cdot 4n] = C_1; \; [c_I c_I (4n + I - 1)] = C_1 - \frac{0{,}3333}{C_{I-1}}, \qquad (29)$$

где $C_1 = 3{,}127$, $C_{I-1} = [c_{I-1} c_{I-1} (4n + I - 2)]$.

Коэффициенты уравнений (3) и весовой функции дирекционного угла будут

$$[b_1 f_\alpha \cdot 2n] = D; \; [b_2 f_\alpha (2n+1)] = -D' + 0{,}5 \frac{D}{B_1},$$

где $D=0{,}5524$, $D'=0{,}5406$.

Далее для нечетных i

$$[b_i f_\alpha (2n+i-1)] \Big|_{i=3}^{i=n-1} = D - 0{,}4182 \frac{[b_{i-1} f_\alpha (2n+i-2)]}{B}; \qquad (30)$$

для четных i

$$[b_i f_\alpha (2n+i-1)] \Big|_{i=3}^{i=n-1} = -D' + 0{,}5 \frac{[b_{i-1} f_\alpha (2n+i-2)]}{B}.$$

Формулы (30) справедливы для $i<n$, но при $i=n$

$$[b_n f_\alpha (3n-1)] = 0{,}3359 - 0{,}4182 \frac{[b_{n-1} f_\alpha (3n-2)]}{B}. \qquad (31)$$

Для нижнего ряда треугольников эти же коэффициенты д[...] нечетных i

$$[b_i'f_\alpha(3n+i-1)]=-0{,}21; \qquad (3[...])$$

для четных i $[b_i'f_\alpha(3n+i-1)]=0{,}1.$

Определение значений обратных весов $\frac{1}{P_\alpha}$

N	По схеме Гаусса	По формуле (37)	Погрешность, %
1	0,8496	0,8525	0,34
2	1,1498	1,1362	1,18
3	1,4327	1,4199	0,89
4	1,7167	1,7036	0,76
5	2,0020	1,9837	0,74
6	2,2876	2,2710	0,73

Последний коэффициент уравнений (3) и весовой функци[...] дирекционного угла имеет вид

$$[b_n'f_\alpha(4n-1)]=-0{,}1886. \qquad (33)$$

Для уравнений типа (6) и весовой функции можно принять[...] что

$$[c_1f_\alpha\cdot 4n]=1{,}042. \qquad (34)$$

Затем в общем виде для $N\geqslant 2$

$$[c_I f_\alpha(4n+I-1)]=1{,}3333-\frac{0{,}3889}{1{,}3333^{(I+1)}}. \qquad (35)$$

Обратный вес функции дирекционного угла связующих сто[...] рон ряда из центральных систем определится по формуле

$$\frac{1}{P_\alpha}=[f_\alpha f_\alpha]-\sum_1^n\frac{[a_i f_\alpha(i-1)]^2}{[a_i a_i(i-1)]}-\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n}\frac{[a_i'f_\alpha(n+i-1)]^2}{[a_i'a_i'(n+i-1)]}-$$

$$-\sum_1^n\frac{[b_i f_\alpha(2n+i-1)]^2}{[b_i b_i(2n+i-1)]}-\sum_1^n\frac{[b_i'f_\alpha(3n+i-1)]^2}{[b_i'b_i'(3n+i-1)]}-$$

$$-\sum_1^I\frac{[c_I f_\alpha(4n+I-1)]^2}{[c_I c_I(4n+I-1)]}. \qquad (36)$$

Выражение (36) после подстановок и простых вычислений имеет вид

$$\frac{1}{P_\alpha}=0{,}2837\,N+0{,}5688. \qquad (37)$$

Проверка формулы (37) на теоретических моделях показала, что этой формулой можно пользоваться для вычисления обратных весов функции дирекционных углов для любых значений N. Результаты проверки приведены в таблице.

Список литературы: 1. *Корницкий Ю. Н.* Оценка точности элементов линейно-углового ряда, состоящего из геодезических квадратов, проложенного между исходными пунктами. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1974, вып. 19. 2. *Монин И. Ф.* Предвычисление точности рядов из центральных систем линейно-угловой триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1976, вып. 24. 3. *Новосельская В. П.* Точность цепи линейно-угловой триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1964, вып. 1. 4. *Проворов К. Л.* Точность цепи триангуляции с измеренными сторонами и углами. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1959, № 3.

Работа поступила в редколлегию 6 декабря 1977 года. Рекомендована кафедрой геоморфологии Львовского госуниверситета.