

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ, А. Н. МАРЧЕНКО

О МАКСВЕЛЛОВЫХ ПАРАМЕТРАХ
ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ МАРСА

На основании анализа эволюций орбит естественных и искусственных спутников Марса к настоящему времени построено несколько моделей гравитационного поля планеты [12, 13, 15]. При этом ареопотенциал представлен рядом по шаровым функциям V_n :

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}}, \quad (1)$$

где Y_n — соответствующие им сферические функции, обычно записываемые как линейная комбинация $(2n+1)$ элементарных гармоник со стоксовыми постоянными C_{nm} , S_{nm} в качестве их коэффициентов; суммирование в формуле (1), естественно, ограничено некоторым числом n^* , различным в разных моделях ($4 \leq n^* \leq 9$).

Однако наряду с указанным представлением сферических и шаровых функций известно [14, 2] и другое, классическое их представление, в котором всякая такая функция n -го порядка определяется $(2n+1)$ максвелловыми параметрами: моментом M_n и координатами (ϑ_i, λ_i) ее n полюсов ($1 \leq i \leq n$), определяющих оси этой функции. А каждый член V_n ряда (1) описывает тогда потенциал мультиполя

$$V_n = (-1)^n \frac{M_n}{n!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (2)$$

— специального точечного объекта, расположенного в начале координат.

От любого из указанных представлений можно перейти к другому, поэтому, в принципе, оба они равноправны, хотя каждое из них имеет свои преимущественные области применения, в которых с определенной точки зрения более выгодно и удобно

то или иное. Вообще же, дополняя друг друга, эти два представления сферических функций образуют их изящную и полную теорию [2], имеющую многочисленные практические приложения.

Таблица 1

Координаты полюсов и значения моментов гравитационных мультиполей Марса

Координаты полюсов мультиполей, град						Значения моментов, $M_n + 3/c^2$		
n	ϑ	λ_{EASt}	n	ϑ	λ_{EASt}	n	$M_n \cdot 10^{-7n}$	
2	20,3	254,3	7	28,9	14,4	2	10297391 · 10 ³	
	159,7	254,3		44,8	260,5	3	289065 · 10 ³	
				45,8	207,9	4	50982 · 10 ³	
3	62,2	236,2		46,5	144,5	5	14879 · 10 ³	
	81,6	283,4		55,2	79,8	6	5812 · 10 ³	
	95,9	237,1		71,9	16,7	7	2602 · 10 ³	
				83,0	292,8	8	858 · 10 ³	
4	39,3	272,7		8	13,0	147,6	9	425 · 10 ³
	56,4	97,3			34,7	213,8	Примечание	
	75,5	244,5	35,9		87,8	ϑ — полярное расстояние		
	95,4	9,8	51,7		290,5	λ — долгота (положительное направление счета — на восток от нулевого меридиана)		
			73,2		61,3			
		74,7	229,6					
5	18,4	303,4	80,4		129,2			
	71,3	147,3	95,2		177,8			
	71,8	281,8						
	79,3	221,3						
6	90,6	272,8						
				3,5	241,5			
	23,0	330,5		32,1	166,5			
	52,0	238,1		32,7	69,8			
	58,7	76,8	9	44,1	261,6			
	64,8	343,3		55,2	307,5			
	79,2	172,4		69,8	27,8			
	94,3	289,3		72,1	177,6			
				75,5	69,0			
				89,4	298,7			

Использование максвеллова представления сферических функций при описании гравитационного поля Земли и основных глобальных особенностей ее фигуры описано в ряде работ [7, 4, 5, 8]. Ниже аналогичные вопросы рассмотрены применительно к гравитационному полю, фигуре Марса и используются при построении многоточечной модели, описывающей главную часть ареопотенциала.

На основании методики [9, 6] и наиболее полной модели гравитационного потенциала Марса (Сьегрен и др. [15]) впервые получены координаты полюсов и моменты гравитационных мультиполей Марса (табл. 1) до 9-го порядка включительно.

Так как оси мультиполей, соответствующих только зональным гармоникам разложения (1), совпадают с осью z используемой прямоугольной системы координат (в рассматриваемом случае с осью вращения планеты), то реальное наличие параметров мультиполей позволяет сделать определенные выводы относительно степени отличия фигуры ареоида от осесимметричной планеты. Например, поскольку оси квадриполя (мультиполя 2-го порядка) отклоняются от оси вращения Марса на $\sim 20^\circ$, что намного больше, нежели для Земли ($\sim 4,6^\circ$), то тем самым подтверждается известный вывод о том, что Марс имеет значительно бóльшую трехосность чем Земля, а также факт бóльшего отклонения Марса (по сравнению с Землей) от состояния гидростатического равновесия. А преобладающее влияние «незональных» мультиполей (за исключением квадриполя) свидетельствует о значительной асимметрии планеты в долготном отношении.

Основные особенности ареоида легко выявить, изучая влияние отдельных мультиполей на его фигуру. Наиболее весомый вклад в ондуляции ареоида, рассматриваемые относительно эллипсоида вращения, дают квадриполь и октаполь (мультиполь 3-го порядка). Например, член $I_{22} = \sqrt{C_{22}^2 + S_{22}^2}$ обуславливает в области Tharsis и Syrtis Major поднятия, достигающие 0,7 км. Октаполь вызывает в этих регионах ондуляции +0,53 км и -0,53 км соответственно, а влияние мультиполей более высоких порядков здесь практически компенсируется. Действительно, в районах Tharsis и Syrtis Major суммарный вклад квадриполя и октаполя составляет соответственно $\sim 1,2$ км и $\sim 0,2$ км, в то же время ондуляции ареоида, построенные, например, по стоксовым постоянным Сьегрена и др. [15] до 9-го порядка, имеют в этих местах значения $\sim 1,3$ км и $\sim 0,25$ км. Таким образом, уникальная аномалия в области Tharsis и сравнительно ровная поверхность в антиподной области Syrtis Major обусловлены совместным влиянием мультиполей 2-го и 3-го порядков, которым объясняются и другие глобальные особенности фигуры ареоида.

Последнее приводит к целесообразности построения приближенных конструкций квадриполя и октаполя для описания ими главной части гравитационного потенциала Марса*.

При этом потенциал $V^{(0)}$ приближенной конструкции мультиполя нулевого порядка может считаться уже известным $V_{(0)} =$

* Далее используется тот факт [7, 11], что потенциал $V^{(n)}$ приближенной конструкции мультиполя представляет собой сумму потенциалов 2^n гравитационных зарядов (имеющих одинаковую массу, но при этом половина зарядов со знаком плюс, а другая — со знаком минус), причем связан с потенциалом $V^{(n)}$ мультиполя соотношением

$$V_n = \lim_{h_i \rightarrow 0} V^{(n)} = V^{(n)} + R_n,$$

где h_i — расстояние между зарядами; R_n — погрешность аппроксимации потенциала V_n мультиполя потенциалом $V^{(n)}$ его приближенной конструкции.

$=V_0=fM/r$ (fM — произведение гравитационной постоянной на массу планеты), и решение поставленной задачи сводится к аппроксимации потенциалов квадриполя V_2 и октаполя V_3 потенциалами $V^{(2)}$ четырех ($2^2=4$) и $V^{(3)}$ восьми ($2^3=8$) точечных масс.

В случае квадриполя две отрицательные точечные массы были помещены на оси z вращения планеты, а две положительные — на оси наименьшего момента инерции под теми экстремумами уровня поверхности $V_2=\text{const}$, которые расположены в плоскости осей мультиполя 2-го порядка.

Таблица 2

Параметры модели точечных масс, аппроксимирующей главную часть гравитационного потенциала Марса

ϑ_i , град	λ_i , (EAST), град	d_i , ед. экватор. радиуса*	μ_i , ед. ** массы Марса	Примечание
0,00	0,00	$0,100 \cdot 10^{-1}$	-9,1637	Приближенная конструкция квадриполя
90,00	254,27	$0,369 \cdot 10^{-2}$	9,1637	
180,00	0,00	$0,100 \cdot 10^{-1}$	-9,1637	
90,00	74,27	$0,369 \cdot 10^{-2}$	9,1637	
77,98	183,64	0,420	$-0,5225 \cdot 10^{-4}$	Приближенная конструкция октаполя
102,02	3,64	0,420	$0,5225 \cdot 10^{-4}$	
133,88	266,82	0,728	$-0,5225 \cdot 10^{-4}$	
46,12	86,82	0,728	$0,5225 \cdot 10^{-4}$	
19,41	298,40	0,590	$-0,5225 \cdot 10^{-4}$	
160,59	118,40	0,590	$0,5225 \cdot 10^{-4}$	
99,80	64,41	0,814	$-0,5225 \cdot 10^{-4}$	
80,20	244,41	0,814	$0,5225 \cdot 10^{-4}$	

* $a = 3393,4$ км [15].

** $fM = 42828,2$ км³/с² [15].

При этом учитывалось условие параллельности осей приближенной и предельной конструкции квадриполя, за счет чего

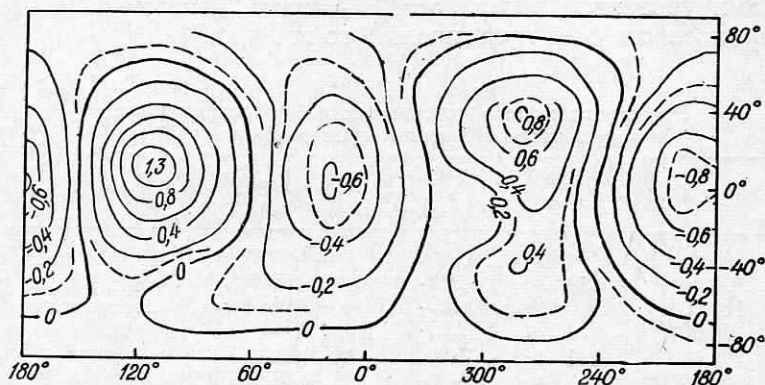
$$D_1 = D_2 \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}, \quad (3)$$

где D_1 — расстояние от начала координат до одной из отрицательных точечных масс; D_2 — до одной из положительных масс; ψ — угол между осями квадриполя ($\psi = 139^\circ, 4$). Величины точечных масс квадриполя находились из сравнения их потенциала $V^{(2)}$ с потенциалом V_2 , обусловленным стоксовыми постоянными 2-го порядка [15], по способу наименьших квадратов.

Точечные массы приближенной конструкции октаполя располагались в первом приближении под восемью экстремумами уровня поверхности $V_3=\text{const}$. Далее составлялась система нелинейных уравнений, в левой части которых фигурировали стоксовы постоянные Марса 3-го порядка [15], а в правой —

параметры восьми точечных масс *. Из решения этой системы находились и значения, и координаты точечных масс октаполя.

Полученные в результате вычислений параметры точечных масс приведены в табл. 2. Значения масс построенной приближенной конструкции превышали массу Марса, что не допускает каких-либо «геофизических» объяснений. Они, однако, приводят к хорошей согласованности поля $V^{(2)}$ четырех точечных масс



Ондуляции высот ареоида (в км), обусловленные тринадцатиточечной моделью ареопотенциала (относительно эллипсоида вращения, $a=3393,4$, $\alpha=1/192$).

с полем V_2 (среднее квадратическое отклонение σ между уровнями поверхностями $V_2 = \text{const}$ и $V^{(2)} = \text{const}$ составляет всего 0,8 м!), так же как и при аппроксимации главной части потенциала осесимметричной планеты двумя неподвижными центрами с мнимыми массами [1].

Приближенно гравитационный потенциал Марса теперь в любой внешней точке может быть вычислен по следующей формуле:

$$V_r(r, \vartheta, \lambda) = fM \left[\frac{1}{r} + \sum_{i=1}^{12} \frac{\mu_i}{\rho_i} \right], \quad (4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \rho_i &= \sqrt{r^2 + d_i^2 a^2 - 2rd_i a \cos \gamma_i}; \\ \cos \gamma_i &= \cos \vartheta \cos \vartheta_i + \sin \vartheta \sin \vartheta_i \cos (\lambda - \lambda_i), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

а $(D_i, \vartheta_i, \lambda_i)$ — полярные координаты i -й точечной массы, причем $D_i = d_i \cdot a$ (a — большая полуось планетарного эллипсоида, $a = 3393,4$ км); μ_i — величина точечной массы m_i , выраженная в единицах массы планеты, т. е. $\mu_i = m_i/M$; (r, ϑ, λ) — координаты внешней точки.

* Детальное изложение методики построения приближенных конструкций мультиполей на примере Земли приведено в работе [11].

Ондуляции уровенной поверхности $V_r = \text{const}$ относительно эллипсоида вращения ($a = 3393,4$ км; $\alpha = 1/192$) показаны на рисунке. Сравнение его с картами высот ареоида, полученными в последние годы [15, 12, 13], приводит к следующим выводам. В качественном отношении обсуждаемые поверхности практически совпадают, в количественном — имеются некоторые различия (среднее квадратическое отклонение σ_m поверхности $V_r = \text{const}$ относительно поверхности ареоида Сьегрена и др. [15] составляет ~ 150 м*). В целом лучшее соответствие этой поверхности ареюиду наблюдается для западного полушария. На рисунке также хорошо просматривается «трехосность» планеты, достаточно «грубая» структура ареоида, огромная положительная аномалия в области Tharsis, и в противоположность этому — сравнительно «ровная» поверхность в антиподной области Syrtis Major.

Таким образом, можно считать, что предлагаемая модель точечных масс (табл. 2) хорошо описывает главную часть ареопотенциала и достаточно полно представляет его глобальные особенности. Она может служить основой для построения детальной многоточечной модели (типа (4)), однородно представляющей гравитационный потенциал вне Марса и на его физической поверхности.

Список литературы: 1. Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г. Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения искусственных спутников Земли. — *Астрономический журнал*, 1963, т. 40, № 2. 2. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. — Л.: ИЛ, 1952. 3. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970. 4. Марченко А. Н. О вычислении элементов октаполя Земли. — *Геодезия, картография и аэрофотосъемка*, 1976, вып. 23. 5. Марченко А. Н. О гравитационном тетраполе Земли. — *Геодезия, картография и аэрофотосъемка*, 1976, вып. 24. 6. Марченко А. Н. О вычислении моментов гравитационных мультиполей Земли. — *Геодезия, картография и аэрофотосъемка*, 1977, вып. 25. 7. Мещеряков Г. А. О мультипольном представлении гравитационного потенциала. — *Геодезия, картография и аэрофотосъемка*, 1974, вып. 19. 8. Мещеряков Г. А., Марченко А. Н. Мультипольное истолкование основных особенностей фигуры геоида. — *Геодезия и картография*, 1976, № 6. 9. Мещеряков Г. А., Марченко А. Н. Нахождение осей гравитационных мультиполей. — *Геодезия, картография и аэрофотосъемка*, 1977, вып. 25. 10. Мещеряков Г. А., Марченко А. Н. Об экстремальных свойствах сферических функций, описывающих внешний гравитационный потенциал Земли. — *Геодезия, картография и аэрофотосъемка*, 1978, вып. 27. 11. Мещеряков Г. А., Марченко А. Н. Модель точечных масс геопотенциала, построенная на основе его мультипольного представления. — *Геодезия, картография и аэрофотосъемка*, 1979, вып. 29. 12. *Garczynski I. P., Tolson R. H., Michael W. H. Jr. Mars gravity field: combined Viking and Mariner 9 results.* — *J. Geophys. Res.*, 1977, v. 82, N 28. 13. *Daniels E. F., Tolson R. H. Spherical harmonic representation of the gravity field of Mars using a short-arc technique.* — *AIAA Pap.*,

* Аналогичные построения для Земли [11] характеризуются величиной $\sigma_3 \approx 16$ м. Однако если сравнить отношение σ_m к максимальной ондуляции ареоида (1,3 км) с отношением σ_3 к максимальной ондуляции геоида (110 м), то можно заключить, что представление гравитационных потенциалов и Марса, и Земли указанным числом масс выполнено с почти одинаковой степенью точности.

1976, N 823. 14. *Maxwell J. C.* A treatise on electricity and magnetism. v. 1, 2nd edition, Oxford, 1881. 15. *Sjogren W. L., Lorell J., Wong L., Downs W.* Mars gravity field based on a short-arc technique. — *J. Geophys. Res.*, 1975, v. 80, N 20.

Работа поступила в редколлегию 18 декабря 1978 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.
