

таты радиодальномерных измерений (таблица), произведенные в 1971 г. С. И. Плахотным на геодезическом полигоне Львовского политехнического института в г. Судовая Вишня. Линия базиса длиной 10115,341 м, измеренная ранее инварными проволоками с относительной погрешностью 1 : 800 000, измерялась радиодальномером РДГВ в течение двух суток через каждые два часа. Из таблицы видно, что дисперсия  $\sigma_2^2$ , вычисленная после введения поправок  $\Delta S$ , меньше  $\sigma_1^2$ . Следовательно, введение поправок в измеренное расстояние по предлагаемой методике представляет несомненный интерес.

**Список литературы:** 1. *Изов А. А., Пеллинен Л. П.* Исследование земной рефракции и методов геодезического нивелирования. — Тр./ЦНИИГАиГ, 1955, вып. 102. 2. Инструкция по полигонометрии и трилатерации. М., Недра, 1976. 3. *Иордан В., Эггерт О., Кнейсель М.* Руководство по геодезии, т. 1. М., 1971. 4. *Маслич Д. И., Лисевич М. Ф., Листопадский А. А.* — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1975, вып. 22. 5. *Островский А. Л.* — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1971, вып. 13. 6. *Mitter Josef.* Über die Bestimmung der meteorologischen Einflüsse auf die electro-optische Entfernungs-messung. — Veröff. Dtsch. geod. Kommiss Bayer Akad. Wiss. B. 1966, N 123. 7. *Robitzsch M.* Die mittlere Abnahme des Dampfdruckes mit der Höhe. Meteorolog. Zeitschr., Bd. 61. 1944.

Работа поступила в редколлегию 13 января 1978 года. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Украинского института инженеров водного хозяйства.

УДК 528.21/22

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ, д-р техн. наук  
Львовский политехнический институт

## ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВНЕШНЕГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА ПЛАНЕТЫ

### § 1. Внешний гравитационный потенциал

$$V(Q) = f \int_{\tau} \frac{\delta P}{r_{QP}} d\tau_P, \quad (P \in \tau; Q \in \tau) \quad (1)$$

планеты принято, начиная с Лапласа, представлять рядом шаровых функций

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}}, \quad (2)$$

в котором  $Y_n$  суть сферические функции

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = fMR^n \sum_{k=0}^n (C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda) P_n^k(\vartheta). \quad (3)$$

Изведенным  
не Львов  
ия. Линия  
ми прово  
змерялась  
з каждые  
численная  
но, введе  
мой мето

вание зем  
НИИГАиК  
М., Недр  
езии, т. 6,  
Геодезия,  
Л. — Гео  
Josef. Über  
sche Entfer  
s. В. 1966,  
der Höhe.

но 13 янва  
кафедры  
кого инсти  
тута.

ГО

М ша-

Здесь  $r, \vartheta, \lambda$  — планетоцентрические координаты;  $f$  — гравитационная постоянная;  $\tau$  и  $M$  — объем и масса планеты соответственно;  $R$  — либо ее средний радиус (для Луны), либо средний (у некоторых авторов — наибольший) радиус экватора (для Земли, Марса);  $C_{nk}, S_{nk}$  — стоксовы постоянные планеты — параметры ее гравитационного поля, подлежащие определению по результатам разнообразных наблюдений и аналитически выражаемые (с точностью до постоянных множителей) интегралами по объему планеты от произведений ее плотности на элементарные шаровые функции.

Ряд (2) равномерно сходится при любом  $r > R^*$ , где  $R^*$  — наименьший из радиусов сфер, охватывающих все тело  $\tau$ . Сходимость же этого ряда в точках поверхности  $\sigma$  планеты и в ее ближайшей окрестности, ограниченной  $\sigma$  и сферой  $R^* = \text{const}$ , представлялась сомнительной еще Пуассону, а затем и некоторым другим ученым, в том числе А. М. Ляпунову [3], и эта сходимость для данных случаев никем до сих пор не доказана. В настоящее время усилия исследователей направлены или на построение таких модификаций ряда (2), (3), при которых он будет сходиться и на  $\sigma$  [5, 6], или на введение (взамен ряда (2), (3)) иных рядов гармонических функций, сходящихся на поверхности более близкой к  $\sigma$ , нежели сфера  $R^* = \text{const}$ , например на эллипсоиде вращения [1]. Заметим, что с точки зрения использования потенциала  $V$  при расчетах орбит ИСЗ и при изучении геоида удачным выходом из затруднения, связанного с неясным поведением ряда (2) на  $\sigma$ , является замена потенциала (1) суммой потенциалов точечных масс, располагаемых определенным образом внутри планеты. Последнее не снимает обсуждаемой проблемы, и ниже мы рассматриваем один из возможных новых подходов к ней, в котором потенциал  $V(Q)$  вне планеты эллипсоидальной формы заменяем его приближенным выражением, получаемым на основе теории наилучших квадратических приближений.

§2. Пусть  $T$  — пространство, внешнее относительно трехосного эллипсоида  $E$  с полуосями  $a, b, c$ . Отнесем  $T$  к обобщенным сферическим координатам  $\rho, \vartheta, \lambda$ :

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} \xi &= a\rho \sin \vartheta \cos \lambda; \\ \eta &= b\rho \sin \vartheta \sin \lambda; \\ \zeta &= c\rho \cos \vartheta, \end{aligned} \right\} (4)$$

где  $1 \leq \rho < \infty$ ;  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ;  $0 \leq \lambda < 2\pi$ ;  $\rho = r/r_E$ . Здесь  $r$  — расстояние от начала координат, совмещенного с центром эллипсоида, до произвольной точки  $M$  пространства  $T$ ;  $r_E$  — расстояние от начала координат до точки на основном эллипсоиде  $E$  по направлению к точке  $M$ . Далее будем пользоваться переменной  $x$ :

$$(2) \quad x = \rho - 1, \quad [0 \leq x < \infty). \quad (5)$$

Элемент объема пространства  $d\tau = abc(1+x)^2 d\sigma dx$ , где  $d\sigma = \sin \vartheta d\vartheta d\lambda$  — элемент поверхности единичной сферы.

Рассмотрим в пространстве  $T$  систему функций

$$\{\omega_{ijk}\} = \left\{ e^{-\frac{x}{2}} L_i(x) P_j^k(\vartheta) \begin{cases} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{cases} \right\}$$

с весом

$$p = (1 + \bar{x})^{-2}.$$

Здесь  $L_i(x)$  — полиномы Чебышева—Лагерра (при  $\alpha=0$ ), ортогональные на  $[1, \infty)$  с весом  $e^{-x}$ ;  $P_j^k(\vartheta)$  — присоединенные функции Лежандра, а их произведения на  $\cos k\lambda$  или  $\sin k\lambda$  суть элементарные сферические функции, ортогональные на единичной сфере с весом, равным 1.

Непосредственными вычислениями легко установить в пространстве  $T$  ортогональность системы функции (6) относительно веса (7), а на основе работы [2] — и полноту этой системы. Учитывая это, со всякой функцией  $f(x, \vartheta, \lambda) \in L_T^2$  можно сопоставить обобщенный ряд Фурье по функциям системы (6), т. е. ряд, находимый в соответствии с принципом наименьших квадратов

$$\varepsilon_n^2 = \int_T \frac{1}{(1+x)^2} (f - f_n)^2 d\tau = \min \quad (8)$$

и имеющий вид

$$f(x, \vartheta, \lambda) = e^{-\frac{x}{2}} \sum_{\substack{i, j, k=0 \\ (k < j)}}^{\infty} L_i(x) P_j^k(\vartheta) (a_{ijk} \cos k\lambda + b_{ijk} \sin k\lambda), \quad (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} a_{ijk} \\ b_{ijk} \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{(i!)^2} \frac{2j+1}{2\pi abc} \frac{(j-k)!}{(j+k)!} \times \\ &\times \int_T \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{(1+x)^2} f(x, \vartheta, \lambda) L_i(x) P_j^k(\vartheta) \begin{cases} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{cases} d\tau; \\ a_{ijo} &= \frac{1}{(i!)^2} \frac{2j+1}{4\pi abc} \times \\ &\times \int_T \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{(1+x)^2} f(x, \vartheta, \lambda) L_i(x) P_j(\vartheta) d\tau; \quad b_{ijo} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ряд (9) реализует в  $T$  наилучшую квадратическую аппроксимацию функции  $f(x, \vartheta, \lambda)$ ; этот ряд сходится в среднем к  $f(x, \vartheta, \lambda)$ , а при некоторых ограничениях, накладываемых на разлагаемую функцию, ряд (9) равномерно сходится к той же функции в любой ограниченной области пространства  $T$ .

§ 3. Обратимся теперь к внешнему гравитационному потенциалу  $V$  планеты, принимаемой за трехосный эллипсоид  $E$ . Предположим, что в формулах (9) и (10) вместо  $f$  фигурирует

V. В этом случае указанные формулы представляют приближенно потенциал во всем внешнем — относительно  $E$  — пространстве. Полученный таким способом ряд будет в среднем сходиться к  $V$ . Кроме того, за счет достаточной гладкости потенциала для него ряд (9) будет и равномерно сходящимся. Последнее следует из равномерной сходимости рядов по сферическим функциям и из соответствующей теоремы о сходимости рядов по полиномам Чебышева—Лагерра [4]. Однако главным при этом является сходимость ряда (9) во всех точках пространства  $T$ , внешнего относительно эллипсоида  $E$ . Кроме того, ряд (9), примененный к потенциалу  $V$ , сходится быстрее, нежели ряд (2). Подтвердим это расчетом.

Для простоты вычислений применим ряд (9) к потенциалу шара, положив  $a=b=c=R$ . Тогда из формул (10) легко получим

$$\left. \begin{matrix} a_{ijk} \\ b_{ijk} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{(i!)^2} \frac{fM}{R} I_{ij} \begin{cases} C_{jk} \\ C_{jk} \end{cases}, \quad (11)$$

где

$$I_{ij} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{(1+x)^{j+1}} L_i(x) dx. \quad (12)$$

На основании асимптотической оценки для функции  $e^{-\frac{x}{2}} |L_i(x)|$  [4] устанавливаем, что интеграл (12) не возрастает при увеличении индексов  $i$  и  $j$ . С учетом этого обстоятельства из формул (11) следует сравнение скорости сходимости ряда (9) относительно ряда (2): коэффициенты ряда (9) в  $(i!)^2$  раз меньше соответствующих, т. е. имеют те же индексы стоксовых постоянных ряда (2), например, при  $i=5$  первые меньше вторых примерно в  $10^4$  раз.

Имея даже такое предварительное сравнение рядов (9) и (2), представляется полезным развить более детально рассмотренный здесь подход к приближенному представлению внешнего потенциала и в первую очередь учесть гармоничность последнего, что, с одной стороны, «укоротит» ряд (9): число индексов у его коэффициентов уменьшится на единицу, а с другой, — потребует, очевидно, использования обобщенных полиномов Чебышева—Лагерра (при  $\alpha \neq 0$ ).

**Список литературы:** 1. Бровар В. В. Потенциал притяжения планет произвольного сжатия. — *Астрономический вестник*, 1976, т. 10, № 4, 2. Курянт Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1. Пер. с нем. М.—Л., ГИТТЛ, 1951. 3. Ляпунов А. М. Собр. соч., т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1959. 4. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М., Наука, 1976. 5. Petrovskaya M. S. A new form of representing the geopotential. — *Bull. Geod.*, vol. 50, 1976. 6. Petrovskaya M. S. Generalization of Laplace's expansion to the Earth's surface. — *Bull. Geod.*, vol. 51. 1977.

Работа поступила в редколлегию 8 декабря 1977 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.