УДК 528.21/22

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ, д-р техн. наук
Львовский политехнический институт

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВНЕШНЕГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА ПЛАНЕТЫ

§ 1. Внешний гравитационный потенциал

$$V(Q)=f\int\limits_{\tau}\frac{\delta_P}{r_{QP}}\,d\tau_P,\quad (P\in\tau;\ Q\tau) \tag{1}$$

планеты принято, начиная с Лапласа, представлять рядом шаровых функций

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Y_n(\vartheta,\lambda)}{r^{n+1}}, \tag{2}$$

в котором Y_n суть сферические функции

$$Y_n(\vartheta,\lambda)=fMR^n\sum_{k=0}^{n}\left(C_{nk}\cos k\lambda+S_{nk}\sin k\lambda\right)P_n^k(\vartheta). \tag{3}$$

Здесь r, ϑ, λ — планетоцентрические координаты; f — гравитационная постоянная; τ и M — объем и масса планеты соответственно; R — либо ее средний радиус (для Луны), либо средний (у некоторых авторов — наибольший) радиус экватора (для Земли, Марса); C_{nk}, S_{nk} — стоксовы постоянные планеты — параметры ее гравитационного поля, подлежащие определению по результатам разнообразных наблюдений и аналитически выражаемые (с точностью до постоянных множителей) интегралами по объему планеты от произведений ее плотности на элементарные шаровые функции.

Ряд (2) равномерно сходится при любом $r > R^*$, где R^* — наименьший из радиусов сфер, охватывающих все тело τ. Сходимость же этого ряда в точках поверхности σ планеты и в ее ближайшей окрестности, ограниченной σ и сферой $R^* = \mathrm{const}$, представлялась сомнительной еще Пуассону, а затем и некоторым другим ученым, в том числе А. М. Ляпунову [3], и эта сходимость для данных случаев никем до сих пор не доказана. В настоящее время усилия исследователей направлены или на построение таких модификаций ряда (2), (3), при которых он будет сходиться и на σ [5, 6], или на введение (взамен ряда (2), (3)) иных рядов гармонических функций, сходящихся на поверхности более близкой к σ, нежели сфера $R^* = \mathrm{const}$, например на эллипсоиде вращения [1]. Заметим, что с точки зрения использования потенциала V при расчетах орбит ИСЗ и при изучении геоида удачным выходом из затруднения, связанного с неясным поведением ряда (2) на σ, является замена потенциала (1) суммой потенциалов точечных масс, располагаемых определенным образом внутри планеты. Последнее не снимает обсуждаемой проблемы, и ниже мы рассматриваем один из возможных новых подходов к ней, в котором потенциал $V(Q)$ вне планеты эллипсоидальной формы заменяем его приближенным выражением, получаемым на основе теории наилучших квадратических приближений.

§ 2. Пусть T — пространство, внешнее относительно трехосного эллипсоида E с полуосями a, b, c. Отнесем T к обобщенным сферическим координатам ρ, ϑ, λ:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a\rho \sin\vartheta \cos\lambda; \\ \eta &= b\rho \sin\vartheta \sin\lambda; \\ \zeta &= c\rho \cos\vartheta, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $1 \leqslant \rho < \infty$; $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$; $0 \leqslant \lambda < 2\pi$; $\rho = r/r_E$. Здесь r — расстояние от начала координат, совмещенного с центром эллипсоида, до произвольной точки M пространства T; r_E — расстояние от начала координат до точки на основном эллипсоиде E по направлению к точке M. Далее будем пользоваться переменной x:

$$x = \rho - 1, \ [0 \leqslant x < \infty). \tag{5}$$

Элемент объема пространства $d\tau = abc(1+x)^2 d\sigma dx$, где $d\sigma = \sin\vartheta d\vartheta d\lambda$ — элемент поверхности единичной сферы.

Рассмотрим в пространстве T систему функций

$$\{\omega_{ijk}\} = \left\{ e^{-\frac{x}{2}} L_i(x)\, P_j^k(\vartheta) \begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix} \right. \tag{6}$$

с весом

$$p = (1 + x)^{-2}. \tag{7}$$

Здесь $L_i(x)$ — полиномы Чебышева—Лагерра (при $\alpha = 0$), ортогональные на $[1, \infty)$ с весом e^{-x}; $P_j^k(\vartheta)$ — присоединенные функции Лежандра, а их произведения на $\cos k\lambda$ или $\sin k\lambda$ — суть элементарные сферические функции, ортогональные на единичной сфере с весом, равным 1.

Непосредственными вычислениями легко установить в пространстве T ортогональность системы функции (6) относительно веса (7), а на основе работы [2] — и полноту этой системы. Учитывая это, со всякой функцией $f(x, \vartheta, \lambda) \in L_T^2$ можно сопоставить обобщенный ряд Фурье по функциям системы (6), т. е. ряд, находимый в соответствии с принципом наименьших квадратов

$$\varepsilon_n^2 = \int\limits_T \frac{1}{(1 + x)^2} (f - f_n)^2\, d\tau = \min \tag{8}$$

и имеющий вид

$$f(x, \vartheta, \lambda) = e^{-\frac{x}{2}} \sum_{\substack{i,\, j,\, k = 0 \\ (k \leqslant j)}}^{\infty} L_i(x)\, P_j^k(\vartheta)(a_{ijk} \cos k\lambda + b_{ijk} \sin k\lambda), \tag{9}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{matrix} a_{ijk} \\ b_{ijk} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{(i!)^2}\, \frac{2j + 1}{2\pi abc}\, \frac{(j - k)!}{(j + k)!} \times \\ &\times \int\limits_T \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{(1 + x)^2} f(x, \vartheta, \lambda)\, L_i(x)\, P_j^k(\vartheta) \begin{cases} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{cases} d\tau; \\ &a_{ij0} = \frac{1}{(i!)^2}\, \frac{2j + 1}{4\pi abc} \times \\ &\times \int\limits_T \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{(1 + x)^2} f(x, \vartheta, \lambda) L_i(x) P_j(\vartheta)\, d\tau; \; b_{ij0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ряд (9) реализует в T наилучшую квадратическую аппроксимацию функции $f(x, \vartheta, \lambda)$; этот ряд сходится в среднем к $f(x, \vartheta, \lambda)$, а при некоторых ограничениях, накладываемых на разлагаемую функцию, ряд (9) равномерно сходится к той же функции в любой ограниченной области пространства T.

§ 3. Обратимся теперь к внешнему гравитационному потенциалу V планеты, принимаемой за трехосный эллипсоид E. Предположим, что в формулах (9) и (10) вместо f фигурирует

V. В этом случае указанные формулы представят приближенно потенциал во всем внешнем — относительно E — пространстве. Полученный таким способом ряд будет в среднем сходиться к V. Кроме того, за счет достаточной гладкости потенциала для него ряд (9) будет и равномерно сходящимся. Последнее следует из равномерной сходимости рядов по сферическим функциям и из соответствующей теоремы о сходимости рядов по полиномам Чебышева—Лагерра [4]. Однако главным при этом является сходимость ряда (9) во всех точках пространства T, внешнего относительно эллипсоида E. Кроме того, ряд (9), примененный к потенциалу V, сходится быстрее, нежели ряд (2). Подтвердим это расчетом.

Для простоты вычислений применим ряд (9) к потенциалу шара, положив $a=b=c=R$. Тогда из формул (10) легко получим

$$\left.\begin{matrix} a_{ijk} \\ b_{ijk} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{(i!)^2} \frac{fM}{R} I_{ij} \left\{\begin{matrix} C_{jk}, \\ C_{jk} \end{matrix}\right. \qquad (11)$$

где

$$I_{ij} = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{(1+x)^{j+1}} L_i(x)\, dx. \qquad (12)$$

На основании асимптотической оценки для функции $e^{-\frac{x}{2}}|L_i(x)|$ [4] устанавливаем, что интеграл (12) не возрастает при увеличении индексов i и j. С учетом этого обстоятельства из формул (11) следует сравнение скорости сходимости ряда (9) относительно ряда (2): коэффициенты ряда (9) в $(i!)^2$ раз меньше соответствующих, т. е. имеют те же индексы стоксовых постоянных ряда (2), например, при $i=5$ первые меньше вторых примерно в 10^4 раз.

Имея даже такое предварительное сравнение рядов (9) и (2), представляется полезным развить более детально рассмотренный здесь подход к приближенному представлению внешнего потенциала и в первую очередь учесть гармоничность последнего, что, с одной стороны, «укоротит» ряд (9): число индексов у его коэффициентов уменьшится на единицу, а с другой, — потребует, очевидно, использования обобщенных полиномов Чебышева—Лагерра (при $\alpha \neq 0$).

Список литературы: 1. *Бровар В. В.* Потенциал притяжения планет произвольного сжатия. — Астрономический вестник, 1976, т. 10, № 4, 2. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики, т. 1. Пер. с нем. М.—Л., ГИТТЛ, 1951. 3. *Ляпунов А. М.* Собр. соч., т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1959. 4. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М., Наука, 1976. 5. *Petrovskaya M. S.* A new form of representing the geopotential. — Bull. Geod., vol. 50, 1976. 6. *Petrovskaya M. S.* Generalization of Laplace's expansion to the Earth's surface. — Bull. Geod., vol. 51. 1977.

Работа поступила в редколлегию 8 декабря 1977 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.