

Сделанные выводы очень просты и лишь иллюстрируют известные закономерности. При схематичности выполненных примеров условно правильного и неправильного отображения взаимосвязей, эксперимент позволяет наметить перспективные пути их исследования с помощью анаморфоз. Возможность выявления пока не установленных взаимосвязей, а также относительная простота изготовления анаморфоз по сравнению с другими аналоговыми методами [2—4], однозначность их построения и т. д. могут обеспечить более широкое их применение в географических исследованиях.

Список литературы: 1. Василевский Л. И. Анаморфированные карты переменного масштаба и их применение в экономической картографии. — В кн.: Новое в тематике, содержании и методах составления экономических карт. М., 1979. 2. Расположенский Н. А., Свентэк Ю. В., Тикуннов В. С. О возможностях применения электрического моделирования в географии. — Вестн. Моск. ун-та, Сер. геогр. 1972, № 4. 3. Raspolozhenskiy N. A., Svntek Yu. V., Tikunov V. S. Automation of compilation process of anamorphic images. — Automation the new trend in cartography. Budapest, 1974. 4. Skoda L., Roberison J. C. Isodemographic map of Canada. — Geogr. Pap. Lands Dir. Dep. Environ., 1972, № 50, VIII.

Статья поступила в редколлегию 07. 09. 81

УДК 528.422:007.2

Л. К. ВОИСЛАВСКИЙ

ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ РЕЛЬЕФА, ИЗОБРАЖЕННОГО ГОРИЗОНТАЛЯМИ

На топографических картах и планах рельеф изображают горизонталями в сочетании с отметками точек, а также надписями глубин (высот) оврагов, обрывов и др. элементов поверхности. Любую совокупность горизонталей можно рассматривать как множество сообщений, которое вместе с другими сообщениями (отметки, указатели глубин и т. д.) представляет нам информацию о рельефе местности [8]. Количественная оценка этой информации может быть выполнена на основе стохастической информационной модели рельефа*, которая базируется на статистических закономерностях рисунка горизонталей, исследованных в [7].

Рассмотрим одну отдельно взятую горизонталь. Аппроксимирем ее ломаной линией [5]. Энтропию $H(\Gamma_i)$ последовательности характерных точек $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ можно представить в виде иерархической суммы условных энтропий [11]

$$H(\Gamma_i) = H(u_0) + H(u_1|u_0) + H(u_2|u_0, u_1) + \dots + H(u_n|u_0, u_1, \dots, u_{n-1}).$$

* Понятие «информационная модель рельефа» употребляется здесь в том смысле, как это определено в монографии [10].

Если фиксирована хотя бы одна из точек горизонтали, например, u_0 , принимаем $H(u_0) = 0$. Так как при добавлении условий энтропия не возрастает, с некоторым запасом можем записать

$$H(\Gamma_i) = H(u_1|u_0) + H(u_2|u_1) + \dots + H(u_n|u_{n-1}). \quad (1)$$

Положение характерной точки u_j относительно точки u_{j-1} однозначно определяется азимутом A_j и длиной l_j элементарного отрезка, соединяющего эти точки. Случайные величины A и l стохастически независимы [7]. Поэтому условную энтропию характерной точки горизонтали будем рассматривать как сумму энтропий

$$H(u_j|u_{j-1}) = H(l) + H(A). \quad (2)$$

Экспериментальными исследованиями установлено, что, по крайней мере в первом приближении, можно принять [7].

1. Случайная величина l имеет гамма-распределение с плотностью вероятностей

$$f(l) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} l^{\alpha-1} \exp(-\lambda l). \quad (3)$$

2. Случайная величина A может иметь одно- или двумерное распределение Мизеса с плотностью вероятностей

$$f(A) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \exp\{k \cos(A - \mu)\}. \quad (4)$$

В выражениях (3), (4) приняты обозначения: α, λ, k, μ — параметры распределений, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, $I_0(k)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Энтропия длины отрезка $H(l)$, принимая во внимание (3), будет равна [6]:

$$H(l) = \log \left[\frac{\Gamma(\alpha) \left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha-\alpha} l^{-\alpha}}{\Delta l} \right] - (\alpha - 1) M(\log l), \quad (5)$$

где \log — символ двоичного логарифма, e — основание натуральных логарифмов, \bar{l} — средняя длина элементарного отрезка, Δl — шаг квантования горизонтали по длине, $M(\log l)$ — математическое ожидание функции $f = \log l$.

Чтобы найти $M(\log l)$, составим на основании (3) логарифмированную функцию правдоподобия [2]

$$\log L = n\alpha \log \lambda - n \log \Gamma(\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{j=1}^n \log l_j - \lambda \log e \sum_{j=1}^n l_j.$$

Дифференцируем эту функцию по α , приравняем производную к нулю и разделим почленно на n . В результате, полагая, что $n \rightarrow \infty$, будем иметь

$$M(\log l) = \log \frac{\bar{l}}{\alpha} + \frac{d \log \Gamma(\alpha)}{d\alpha}.$$

Поскольку полученное выражение не совсем удобно для практического использования, взамен его удалось подобрать эмпирическую формулу

$$M(\log l) = \log \left(\frac{1,015\alpha - 0,21}{\alpha + 0,43} \bar{l} \right), \quad (6)$$

абсолютная погрешность которой в диапазоне $1 \leq \alpha \leq 11$ не превышает 0,03.

Энтропию азимута $H(A)$ найдем из уравнения [3]

$$H(A) = -M[\log f(A)] - M(\log \Delta A_j), \quad (7)$$

где M — символ математического ожидания, ΔA_j — переменный шаг квантования по азимуту.

На основании (4) имеем [9]

$$-M[\log f(A)] = \log [2\pi I_0(k) e^{-k^2}].$$

Так как для замкнутых горизонталей $k < 1$ [7], полученное выражение можно несколько упростить, заменив функцию $I_0(k) e^{-k^2}$ ее средним значением в интервале от $k=0$ до $k=1$

$$-M[\log f(A)] = \log(1,85\pi). \quad (8)$$

Шаг квантования ΔA_j выберем под условием

$$\Delta A_j = \frac{\Delta l}{l_j}.$$

Тогда, принимая во внимание (6), запишем

$$-M(\log \Delta A_j) = \log \left(\frac{1,015\alpha - 0,21}{\alpha + 0,43} \frac{\bar{l}}{\Delta l} \right). \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (7), найдем

$$H(A) = \log \left[1,85\pi \left(\frac{1,015\alpha - 0,21}{\alpha + 0,43} \right) \frac{\bar{l}}{\Delta l} \right]. \quad (10)$$

И, наконец, в результате подстановки (5) и (10) в (2) с учетом формулы (6) получим выражение условной энтропии положения характерной точки горизонтали

$$H(u_j | u_{j-1}) = \log \left[1,85\pi \Psi(\alpha) \left(\frac{\bar{l}}{\Delta l} \right)^2 \right] \text{ бит}, \quad (11)$$

$$\text{где } \Psi(\alpha) = \Gamma(\alpha) \left(\frac{e}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{\alpha + 0,43}{1,015\alpha - 0,21} \right)^{\alpha-2}.$$

Среднее число характерных точек горизонтали произвольной длины L_i равно $L_i \bar{\Lambda}$, где $\bar{\Lambda} = 1/\bar{l}$ — их средняя плотность. Следовательно, энтропию одиночной горизонтали при фиксированной пл-

чальной точке u_0 на основании (1) и (11) можно выразить формулой

$$H(\Gamma_i) = L_i \bar{\Lambda} \left\{ \log 1,85\pi + \log \left[\Psi(\alpha) \left(\frac{\bar{l}}{\Delta l} \right)^2 \right] \right\} \text{ бит}. \quad (12)$$

Если речь идет о топографических картах, то, как было отмечено в [7], параметры α и \bar{l} зависят, главным образом, от масштаба карты. То же самое следует сказать о длине шага квантования Δl . По данным исследования [1], средняя квадратическая погрешность проведения горизонтали между интерполяционными точками составляет в среднем 0,2 мм. Поэтому можно принять, что $\Delta l = 0,2$ мм на карте или плане.

В результате экспериментальных исследований, где были использованы изображения 11 замкнутых горизонталей различной конфигурации, установлено, что для топографических карт в интервале масштабного ряда от 1:1000 до 1:50000 имеет место зависимость

$$\log \left[\Psi(\alpha) \left(\frac{\bar{l}}{\Delta l} \right)^2 \right] = \log \left(\frac{5500}{M + 9,5} \right), \quad (13)$$

где M — знаменатель численного масштаба, уменьшенный в 1000 раз. Так, для масштаба 1:2000 $M=2$, 1:10000 — $M=10$ и т. д. Средняя квадратическая относительная погрешность аппроксимации (13) составляет 5%, а максимальная — 9%.

С учетом (13) энтропию одиночной горизонтали можно выразить формулой

$$H(\Gamma_i) = L_i \bar{\Lambda} \log \left(1,85\pi \frac{5500}{M + 9,5} \right) \text{ бит}. \quad (14)$$

Для определения энтропии горизонталей, если рассматривать их не по отдельности, а в совокупности, необходимо учитывать азимутальную согласованность горизонталей. В самом деле, пусть горизонтали Γ_{i-1} и Γ_i имеют одинаковое число характерных точек, а взаимное расположение этих точек соотносится с рисунком горизонталей. Найдем разности азимутов соответствующих элементарных отрезков:

$$A_{i1} - A_{i-1,1} = a(z_0)_1,$$

$$A_{i2} - A_{i-1,2} = a(z_0)_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_{in} - A_{i-1,n} = a(z_0)_n.$$

Очевидно, условная энтропия азимута элементарного отрезка горизонтали Γ_i , если известно положение горизонтали Γ_{i-1} (или Γ_{i+1}), будет равна энтропии случайной величины $a(z_0)$, т. е.

$$H(A_i/A_{i-1}) = H[a(z_0)]. \quad (15)$$

Разности $a(z_0)$ имеют распределение Мизеса с плотностью веро-

яностей (4). Длина случайного вектора R_z для $a(z_0)$ определяется по формуле [7, 9]

$$R_z = \exp\left(\frac{\tau z_0}{2}\right) \quad (\tau < 0),$$

где z_0 — высота сечения рельефа горизонталями, τ — коэффициент согласованности горизонталей.

Если высота сечения $z_0 \leq 10$ м, то, как показали экспериментальные исследования [7], $R_z > 0,5$ и $k > 1$. В этом случае энтропия распределения Мизеса хорошо аппроксимируется соответствующим выражением для нормального распределения [12]

$$H[a(z_0)] = \log(V\sqrt{2\pi}\sigma), \quad (16)$$

где параметр σ вычисляется по формуле [9]

$$\sigma = \sqrt{-2 \ln R_z} = \sqrt{-\tau z_0}. \quad (17)$$

Это видно из приведенных ниже данных:

R_z	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,97
$H_{\text{Мизеса}}$	2,27	2,07	1,82	1,48	0,93	0,37	0
$H_{\text{норм}}$	2,28	2,06	1,80	1,47	0,92	0,40	0,03

Вот почему на основании (15), (16) и (17) можно записать

$$H(A_i | A_{i-1}) = \log \left[\frac{V\sqrt{2\pi e}(-\tau z_0)}{\Delta A_j} \right], \quad (18)$$

где ΔA_j — переменный шаг квантования.

Так как случайные величины l и $a(z_0)$ независимы, условную энтропию положения характерной точки горизонтали Γ_i , если известно положение горизонтали Γ_{i-1} , можно представить в виде суммы

$$H(u_{ij} | u_{i, j-1}, \Gamma_{i-1}) = H(l) + H(A_i | A_{i-1}). \quad (19)$$

Подставляя в (19) вместо $H(l)$ и $H(A_i | A_{i-1})$ соответствующие им значения из выражений (5) и (18), а также, принимая во внимание (6) и (9), будем иметь

$$H(u_{ij} | u_{i, j-1}, \Gamma_{i-1}) = \log [V\sqrt{2\pi e}(-\tau z_0) \Psi(\alpha) \left(\frac{\bar{l}}{\Delta l}\right)^2]. \quad (20)$$

Соответственно условная энтропия горизонтали Γ_i при фиксированной начальной точке u_0 и известном положении горизонтали Γ_{i-1} выразится формулой

$$H(\Gamma_i | \Gamma_{i-1}) = L_i \bar{A} \log \left[V\sqrt{2\pi e}(-\tau z_0) \Psi(\alpha) \left(\frac{\bar{l}}{\Delta l}\right)^2 \right] \text{бит.}$$

или, имея в виду (13),

$$H(\Gamma_i | \Gamma_{i-1}) = L_i \bar{A} \log \left[V\sqrt{2\pi e}(-\tau z_0) \frac{5500}{M + 9,5} \right] \text{бит.} \quad (21)$$

где L_i — длина горизонтали Γ_i .

Предположим, в процессе составления топографического плана или карты последовательно проводятся горизонтали $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$. Если до того как проведена Γ_{i-1} , энтропия горизонтали Γ_i равна $H(\Gamma_i)$, то после ее проведения она будет $H(\Gamma_i | \Gamma_{i-1})$. Уменьшение энтропии естественно определить как априорную информацию о горизонтали Γ_i , которую представляет нам горизонталь Γ_{i-1} , т. е.

$$I(\Gamma_{i-1} \rightarrow \Gamma_i) = H(\Gamma_i) - H(\Gamma_i | \Gamma_{i-1}). \quad (22)$$

Понимать это следует в том смысле, что форма и положение каждой горизонтали в значительной мере заранее predetermined формой и положением соседних горизонталей. Отмеченное явление хорошо известно топографам, да и не только одним топографам, и широко используется в повседневной практике. Уравнение (22) позволяет описать это явление в количественном отношении. Действительно, на основании (14), (21) и (22) имеем

$$I(\Gamma_{i-1} \rightarrow \Gamma_i) = \bar{A} L_i \log \left[\frac{1,85\pi}{V\sqrt{2\pi e}(-\tau z_0)} \right] \text{бит.} \quad (23)$$

Как и следовало ожидать, эта информация будет тем больше, чем меньше высота сечения и чем больше коэффициент согласованности горизонталей.

Отметим некоторые свойства информации, которую одна из горизонталей может передать о другой горизонтали:

1. Эта информация симметрична в том смысле, что

$$I(\Gamma_{i-1} \rightarrow \Gamma_i) = I(\Gamma_i \rightarrow \Gamma_{i-1}).$$

2. Количество этой информации — неотрицательная величина. Вот почему, принимая во внимание (23), справедливо неравенство

$$\frac{1,85\pi}{V\sqrt{2\pi e}(-\tau z_0)} > 1.$$

Отсюда найдем высоту сечения

$$z_0(\text{max}) = -\frac{1,98}{\tau},$$

при которой согласованный ансамбль горизонталей переходит в простую совокупность, где отсутствует взаимная информация о соседних горизонталях.

3. Такого рода информацию, хотя и в меньшем количестве, могут передавать не только соседние, но и близко расположенные горизонтали

$$I(\Gamma_{i+m} \rightarrow \Gamma_i) = \bar{A} L_i \log \left[\frac{1,85\pi}{V\sqrt{2\pi e m}(-\tau z_0)} \right],$$

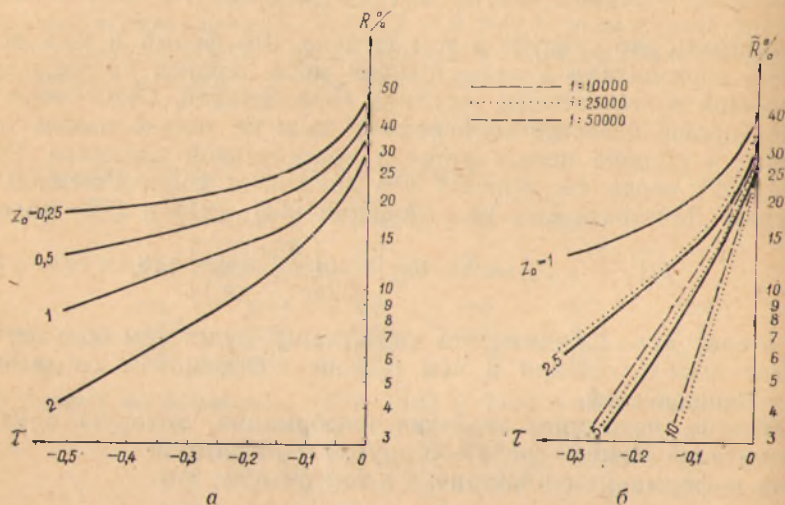
где m — целые числа, определяемые неравенством

$$1 < m \leq \frac{z_0(\text{max})}{z_0}.$$

Если $z_0 \ll z_0(\max)$, можно доказать, что

$$I(\Gamma_{i-1} \rightarrow \Gamma_i) = \frac{\bar{\Delta} L_i}{2} \log(N+1), \quad (24)$$

где N — наибольшее целое число, полученное при делении $z_0(\max)$ на z_0 , т. е. число горизонталей, которые дают информацию о горизонтали Γ_i .



Кривые избыточности горизонталей:

а) — для топографических планов в масштабах 1:500, 1:1000, 1:2000 и 1:5000;
б) — для топографических карт в масштабах 1:10000, 1:25000 и 1:50000.

Другой важной информационной характеристикой горизонталей является ее избыточность, определяемая по формуле [12]

$$\bar{R} = 1 - \frac{H(\Gamma_i | \Gamma_{i-1})}{H(\Gamma_i)} = \frac{I(\Gamma_{i-1} \rightarrow \Gamma_i)}{H(\Gamma_i)}. \quad (25)$$

Подставляя в (25) вместо $H(\Gamma_i)$ и $H(\Gamma_i | \Gamma_{i-1})$ соответствующие им значения из выражений (14) и (21), найдем избыточность горизонталей, изображенных на топографических картах

$$\bar{R} = \frac{\log \left[\frac{1,85\pi}{\sqrt{2\pi e} (-\tau z_0)} \right]}{\log \left(1,85\pi \frac{5500}{M+9,5} \right)}. \quad (26)$$

Кривые избыточности горизонталей в зависимости от коэффициента τ для различных масштабов и высот сечения рельефа показаны на рисунке.

Результаты обработки опытных данных по семи участкам на топографических картах, а также анализ графиков (рисунок), позволяют сделать следующие выводы.

1. Избыточность горизонталей на топографических картах (планах) в интервале масштабного ряда 1:500—1:50000 колеблется в пределах примерно от 30% до 10%. Для сравнения, например, избыточность русского языка (письменное сообщение), равно как и иных европейских языков, более 50% [13]. Таким образом, в сопоставлении с другими видами сообщений избыточность горизонталей относительно невелика. Но и эту, пусть даже небольшую, избыточность можно использовать при наличии соответствующих алгоритмов и программ если не для исправления, то хотя бы для обнаружения с помощью ЭВМ некоторых грубых ошибок, допущенных при съемке рельефа.

2. При одной и той же высоте сечения рельефа избыточность горизонталей очень мало зависит, а для крупномасштабных планов практически не зависит от масштаба.

3. Уменьшение высоты сечения в два раза дает абсолютный прирост избыточности горизонталей порядка 4% для крупномасштабных планов и порядка 5—6% для топографических карт в масштабах 1:10000, 1:25000 и 1:50000.

4. Высота сечения рельефа 0,5 м обеспечивает избыточность горизонталей не менее 13%. В связи с этим применение меньших сечений при изображении рельефа на топографических планах, например, 0,25 м, представляется нам нецелесообразным. В отдельных случаях для большей детализации рельефа можно использовать дополнительные и вспомогательные горизонтали.

Определим теперь энтропию рельефа, изображенного горизонталями. Пусть ограниченный участок поверхности изображается совокупностью горизонталей Γ_i ($i=1, 2, \dots, m$). На основании свойства иерархической аддитивности [11] энтропию этой совокупности можно представить в виде суммы

$$H(S) = H(\Gamma_1) + H(\Gamma_2/\Gamma_1) + \dots + H(\Gamma_m/\Gamma_{m-1}),$$

которую при достаточно большом m , имея в виду (21), допустимо заменить выражением

$$H(S) = \bar{\Lambda} \sum_{i=1}^m L_i \log \left[5500 \frac{\sqrt{2\pi e} (-\tau z_0)}{M+9,5} \right] \text{ бит.} \quad (27)$$

Средняя плотность характерных точек $\bar{\Lambda}$, как и обратная ей величина \bar{l} , зависит от масштаба топографической карты (плана) [7]. Для этой зависимости нами получена эмпирическая формула

$$\bar{\Lambda} = \frac{0,27}{\sqrt{M^4}} \text{ точек/м,} \quad (28)$$

которая обеспечивает вычисление Λ со средней квадратической относительной погрешностью около 13%.

Далее, как известно [4], средний уклон поверхности определяется равенством

$$\bar{i} = \frac{z_0}{F} \sum_{i=1}^m L_i, \quad (29)$$

где F — площадь участка. С учетом (28) и (29) выражение (27) для энтропии рельефа можно преобразовать к виду

$$H(S) = \frac{0,27 Fi}{\sqrt[5]{M^4 z_0}} \log \left[5500 \frac{\sqrt{2\pi e (-\tau z_0)}}{M + 9,5} \right] \text{бит.} \quad (30)$$

Соответственно удельная энтропия рельефа, изображенного горизонталями, в расчете на единицу площади

$$H_0(S) = \frac{0,27 \cdot 10^6 i}{\sqrt[5]{M^4 z_0}} \log \left[5500 \frac{\sqrt{2\pi e (-\tau z_0)}}{M + 9,5} \right] \text{бит/км}^2. \quad (31)$$

Формула (31) выражает среднее количество информации, которое содержит изображение рельефа горизонталями в расчете на единицу площади. Другими словами, это **средняя удельная информационная емкость** изображения рельефа горизонталями на топографической карте.

Как известно, метод горизонталей является на сегодняшний день наиболее удобным, совершенным, и, надо полагать, наиболее информативным способом графического представления и визуального восприятия рельефа. Поэтому, определив информационную емкость изображения рельефа и предполагая, что любой другой способ должен представлять примерно такое же количество информации, можно рассчитать информационную емкость цифровой модели рельефа или банка данных.

Список литературы: 1. Александров Н. Н. и др. Расчеты точности топографических планов в районах орошения. — М.: Геодиздат, 1956. 2. Браунли К. А. Статистическая теория и методология в науке и технике. — М.: Наука, 1977. 3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — М.: Физматгиз, 1962. 4. Видуев Н. Г., Полищук Ю. В. Инженерные изыскания. — Киев: Вища школа, 1979. 5. Войславский Л. К. Вероятностная модель изображения контуров местности на топографических картах. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 29. 6. Войславский Л. К. Энтропия контуров местности, изображенных на топографических картах. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 29. 7. Войславский Л. К. Статистический анализ изображения рельефа горизонталями на топографических картах. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1982, вып. 36. 8. Мазур М. Качественная теория информации. — М.: Мир, 1974. 9. Мардиа К. Статистический анализ угловых наблюдений. — М.: Наука, 1979. 10. Неумывакин Ю. К. Обоснование точности топографических съемок для проектирования. — М.: Наука, 1976. 11. Стратонович Р. Л. Теория информации. — М.: Советское радио, 1975. 12. Шеннон К. Э. Работы по теории информации и кибернетике. — М.: ИЛ, 1963. 13. Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. — М.: Наука, 1973.

Статья поступила в редколлегию 10. 11. 81

УДК 528.7

Х. В. БУРШТЫНСКАЯ, О. В. ТУМСКАЯ

ОТБРАКОВКА ОШИБОЧНЫХ ТОЧЕК ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ВЗАИМНОГО ОРИЕНТИРОВАНИЯ

Современные программы построения пространственных фотограмметрических сетей с использованием ЭВМ предусматривают автоматическую отбраковку ошибочных исходных данных на различных этапах решения задачи. Точность определения координат точек модели в значительной мере зависит от точности определения элементов взаимного ориентирования, поэтому вопросам отбраковки ошибочных точек при вычислении ЭВО уделяется в специальной литературе большое внимание [2, 3, 6, 7].

Отбраковка ошибочных точек при определении ЭВО в настоящее время выполняется по одному из следующих алгоритмов: 1 — по средним квадратическим погрешностям измерений поперечных параллаксов; 2 — по средним остаточным параллаксам.

При использовании первого алгоритма проверяют выполнение условия

$$\delta q_i < 3m_q, \quad (1)$$

где m_q — средняя квадратическая погрешность измерений поперечных параллаксов; δq — остаточный поперечный параллакс на точке.

Точки, не удовлетворяющие этому условию, бракуются. Но при наличии грубых погрешностей ни одна точка не отбракуется, так как значение средних квадратических погрешностей значительно превзойдет максимально допустимый остаточный параллакс.

Поэтому более употребительным является второй алгоритм. При этом отбраковка выполняется в несколько этапов. На первом этапе бракуются точки с очень грубыми погрешностями. Для этого выполняется проверка условия

$$\delta q < \epsilon_1, \quad (2)$$

где ϵ_1 — максимально допустимый параллакс.

На следующем этапе проверяют условие

$$\delta q_{\text{ср}} \leq \epsilon_2, \quad (3)$$

где $\delta q_{\text{ср}}$ — средний остаточный параллакс.

Если условие (3) не выполняется, из всех точек исключается одна точка с δq_{max} . На последнем этапе каждая точка проверяется на условие

$$|\delta q_i| - |\delta q_{\text{ср}}| \leq \epsilon_3. \quad (4)$$