

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ, д-р техн. наук, А. Н. МАРЧЕНКО
Львовский политехнический институт

МОДЕЛЬ ТОЧЕЧНЫХ МАСС ГЛАВНОЙ ЧАСТИ ГЕОПОТЕНЦИАЛА, ПОЛУЧЕННАЯ НА ОСНОВЕ ЕГО МУЛЬТИПОЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

При изучении поля притяжения планеты принято представлять ее гравитационный потенциал V рядом по шаровым функциям. Однако наряду с этим оказалось удобным описывать возмущающий потенциал T ($T=V-U$, где U — нормальный потенциал) суммой потенциалов точечных масс [1, 9—14], как ким-то оптимальным образом расположенных внутри планеты или на ее поверхности. Согласно работе [10], такое представление приводит к однородности описания потенциала и его производных вне Земли и на ее поверхности, что облегчает использование разнообразных комбинаций наблюдений. Оно позволяет также локально уточнять описание поля введением новых точечных масс, незначительно проявляющих свое действие в отдельных областях, и допускает более простое программирование.

Ниже описана методика получения модели точечных масс планеты, аппроксимирующей ее гравитационный потенциал V без выделения из него «нормальной» части, и строится точечная модель главной части геопотенциала. В основу положено мультипольное представление гравитационного потенциала [2, 3, 5, 15] (построение приближенных конструкций гравитационных мультиполей), позволившее — как будет видно из дальнейшего — удобно разделить потенциал V на две составляющих части (четную и нечетную).

Вспомним, что мультиполь порядка l — это точечный объект, расположенный в начале системы координат и полученный в результате предельного сближения двух мультиполей $(l-1)$ -го порядка. Если обозначить потенциал 2^l точечных гравитационных зарядов (которые имеют одинаковую массу, но одна половина зарядов со знаком плюс, а вторая — со знаком минус) через $V^{(l)}$, то потенциал V_l мультиполя порядка l запишется как [3]

$$V_l = \lim V^{(l)}. \quad (1)$$

Внешний гравитационный потенциал V планеты представим в виде ряда шаровых функций (потенциалов мультиполей)

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} V_l \quad (2), \quad \text{или} \quad V = \sum_{l=0}^{\infty} (V^{(l)} + R_l), \quad (3)$$

где $V^{(l)}$ — потенциал приближенной конструкции мультиполя порядка l ; R_l — погрешность аппроксимации потенциала мультиполя V_l потенциалом 2^l зарядов $V^{(l)}$ (точечных масс).

При нахождении параметров точечных масс, рассматриваемых как заряды приближенных конструкций мультиполей с потенциалами $V^{(l)}$, наша задача будет заключаться в таком их выборе, при котором погрешности R_l в формуле (3) компенсируют друг друга $\left(\sum_{l=0}^{\infty} R_l = 0\right)$. В этом случае выражение (3)

для внешнего гравитационного потенциала планеты примет следующий вид:

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} V^{(l)}. \quad (4)$$

Нумеруя теперь заряды совокупности приближенных конструкций мультиполей по порядку и начиная с нулевого, запишем формулу (4) так:

$$V = f \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q_i}{\rho_i} = f \left[\frac{M}{r} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{m_i}{\rho_i} \right], \quad (5)$$

где f — гравитационная постоянная; q_i — величина i -й массы (заряда) со знаком плюс или минус; ρ_i — расстояние от i -й массы до текущей точки внешнего пространства; M — масса мультиполя нулевого порядка (равная массе планеты и помещенная в начале координат); r — расстояние от начала координат до текущей точки; m_i — значение i -й массы, равное по абсолютной величине i -му заряду q_i приближенной конструкции мультиполя. Разложив величину $\frac{1}{\rho_i}$ в ряд по полиномам Лежандра, получим

$$V = f \left[\frac{M}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i m_i \frac{(d_i)^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma_i) \right]. \quad (6)$$

Здесь d_i — расстояние от начала координат до i -й точечной массы. Суммирование по n начинается с единицы, так как при $n=0$ сумма $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{m_i}{r}$ равна нулю, поскольку число масс приближенной конструкции мультиполя порядка l всегда выражается четным числом 2^l , а сами значения 2^l масс равны по абсолютной величине, но одна их половина имеет знак плюс, а другая — знак минус. Поэтому как бы ни было велико число i масс мультиполей приближенной конструкции, всегда последовательно объединяя их по 2^l масс, мы получаем $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{m_i}{r} = 0$.

Не нарушая общности, приближенные конструкции мультиполей будем строить, располагая попарно заряды на одинаковых

расстояниях от начала координат на прямых, проходящих через начало. Причем, если мультиполь имеет четный порядок, то на одной прямой будут расположены всегда одноименные заряды, а если нечетный — разноименные. Такое свойство приближенной конструкции мультиполя дает возможность разделить гравитационный потенциал V на две составляющие. Так, полагая, что i -й и $(i+1)$ -й индексы относятся к двум массам, расположенным на одной прямой и на одинаковых расстояниях от начала, можно написать для этих масс, пользуясь теперь новым индексом j , что

$$d_j = d_i = d_{i+1}; \quad \gamma_j = \gamma_i = 180^\circ - \gamma_{i+1};$$

$$P_n(\cos \gamma_j) = P_n(\cos \gamma_i) = (-1)^n P_n(\cos \gamma_{i+1}). \quad (7)$$

Зависимость между индексами j и l приведена ниже:

j	l	j	l	j	l
1	1	6	3	11	4
2	2	7	3	12	4
3	2	8	4	13	4
4	3	9	4	14	4
5	3	10	4	15	4

В дальнейшем заменим также m_j на символ $m^{(l)}$, который, на пример для низших l , предполагает следующие равенства:

$$m^{(1)} = m_1; \quad m^{(2)} = m_2 = m_3; \quad m^{(3)} = m_4 = m_5 = m_6 = m_7.$$

Применяя затем теорему сложения для сферических функций и изменяя индекс суммирования i на j с учетом формулы (7), перепишем выражение потенциала (6) в следующей форме:

$$V = f \left[\frac{M}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (\alpha_{nm} \cos m\lambda + \beta_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\cos \vartheta) \right], \quad (8)$$

где

$$\alpha_{n0} = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_l^j m^{(l)} (d_j)^n [(-1)^l + (-1)^n] P_n^0(\cos \vartheta_j);$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{nm} \} &= 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \sum_{j=1}^{\infty} \nu_l^j m^{(l)} (d_j)^n [(-1)^l + \\ \beta_{nm} \} &+ (-1)^n] P_n^m(\cos \vartheta_j) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_j; \\ \sin m\lambda_j; \end{array} \right. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$+ (-1)^n] P_n^m(\cos \vartheta_j) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_j; \\ \sin m\lambda_j; \end{array} \right. \quad (10a)$$

$$\nu_l^j = \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{j+1}; \quad l - \text{четно}; \\ 1 \quad ; \quad l - \text{нечетно}. \end{array} \right. \quad (10b)$$

Заметим, что если в соотношении (6) для конструкции каждого мультиполя порядка l предполагалось учитывать 2^l его точечных масс, то в выражениях (8) — (10) — $\frac{2^l}{2} = 2^{l-1}$ масс для каждого мультиполя порядка l .

Считая внешний гравитационный потенциал планеты известным в виде ряда по шаровым функциям

$$V = f \left[\frac{M}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda P_n^m(\cos \vartheta)) \right], \quad (11)$$

где C_{nm} , S_{nm} — стоксовы постоянные; a — средний экваториальный радиус, и сравнивая его с выражением (9), получаем

$$\left. \begin{aligned} Ma^n C_{nm} &= \alpha_{nm}; \\ Ma^n S_{nm} &= \beta_{nm}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Из соотношений (10), (12) легко видеть, что заряды мультиполей приближенных конструкций четных порядков связаны только со стоксовыми постоянными четных порядков, а заряды мультиполей нечетных порядков — со стоксовыми постоянными нечетных порядков. Поэтому, вводя следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \mu^{(l)} &= \frac{m^{(l)}}{M}; \quad D_j = \frac{d_j}{a}; \quad A_{n0}^j = P_n^0(\cos \vartheta_j); \\ \left. \begin{aligned} A_{nm}^j \\ B_{nm}^j \end{aligned} \right\} &= 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta_j) \begin{cases} \cos m\lambda_j \\ \sin m\lambda_j \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

заметим, что при n — нечетном ($n=2t+1$, где $t=0, 1, 2, \dots$), получим

$$\left. \begin{aligned} C_{2t+1, m} \\ S_{2t+1, m} \end{aligned} \right\} = -2 \sum_{j=1}^{\infty} (D_j)^{2t+1} \mu^{(l)} \begin{cases} A_{2t+1, m}^j \\ B_{2t+1, m}^j \end{cases}, \quad (14)$$

где суммирование предполагается по отрицательным массам мультиполей приближенных конструкций нечетных порядков. В случае n четного ($n=2t$, где $t=1, 2, \dots$) соответствующие выражения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} C_{2t, m} \\ S_{2t, m} \end{aligned} \right\} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} (D_j)^{2t} (-1)^j \mu^{(l)} \begin{cases} A_{2t, m}^j \\ B_{2t, m}^j \end{cases}. \quad (15)$$

Здесь четным индексам j соответствуют положительные массы, а нечетным — отрицательные.

Таким образом, используя в качестве исходной информации набор стоксовых постоянных до некоторого порядка N , можно путем решения двух систем нелинейных уравнений (14), (15) определять параметры $\mu^{(l)}$, D_j , ϑ_j , λ_j точечных масс, соответствующих приближенным конструкциям мультиполей. При этом суммирование по j в уравнениях (14) и (15) будет выполняться не до бесконечности, а до некоторых констант, равных общему числу зарядов мультиполей приближенных конструкций соот-

ветственно нечетных и четных порядков. Перед решением систем нелинейных уравнений (14) и (15) необходимо:

1) для каждой конструкции мультиполей нечетных порядков разбить общее число зарядов на пары. Каждая пара должна включать один отрицательный и один положительный заряды, лежащие симметрично относительно начала координат. Тогда суммирование по j в (14) будет выполняться только по отрицательным зарядам таких пар, а положительные заряды автоматически учитываются системой (14);

2) для каждой конструкции мультиполей четных порядков общее число зарядов также разбивается на пары. Однако каждая пара включает либо два отрицательных, либо два положительных заряда. Суммирование в уравнении (15) выполняется в этом случае чередованием отрицательных и положительных зарядов с учетом только одного из зарядов каждой пары, а отрицательные и положительные оставшиеся заряды, симметричные относительно начала, учитываются также системой (15).

Для численного решения систем уравнений (14), (15) в качестве начального приближения необходимы некоторые исходные значения искомым величин, которые лучше всего выбирать на основании данных геофизики. Далее угловые координаты положения зарядов приняты в начальном приближении совпадающими с координатами точек экстремумов уровенных поверхностей $V_n = \text{const}$, что хорошо согласуется с распределением аномалий плотности разных порядков, вычисленных по распределению плотности трехмерной механической модели Земли [7].

Заметим, что к системам (14) и (15) при практических расчетах следует добавлять еще по одному уравнению на каждый порядок мультиполя, выражающему моменты мультиполей M_n через их заряды q и расстояния h_i между ними. Эта связь следует из формулы [3, 5, 15]

$$M_n = n! q h_1 \cdot h_2 \dots h_n, \quad (16)$$

причем значения h_i должны быть выражены через координаты $(d_j, \vartheta_j, \lambda_j)$ зарядов.

Теперь становится ясной чисто практическая выгода описанных построений. Действительно, при использовании зависимости стоксовых постоянных от всех точечных масс [1, 8] необходимо вместо раздельного решения систем вида (14) и (15) решать одну, значительно бóльшую систему нелинейных уравнений, нежели каждая из (14), (15), что гораздо сложнее в вычислительном отношении.

На основании описанной выше методики были определены параметры точечных масс приближенных конструкций гравитационных квадриполя и октаполя Земли. Согласно теории [3, 5, 15], оси приближенной конструкции мультиполя должны быть параллельны его действительным осям, проходящим через начало системы координат. Причем следствие из этого в явном виде известно нам только для квадриполя, так как оси послед-

него лежат в одной плоскости. Поэтому знание параметров реального квадруполья Земли [4, 6] позволяет нам разместить заряды приближенной конструкции в плоскости его осей: в плоскости, проходящей через ось наименьшего A момента инерции и ось наибольшего C момента инерции, которая совпадает с осью вращения планеты [5]. В этой плоскости уровенная поверхность $V_2 = \text{const}$, соответствующая учету только стоксовых постоянных второго порядка, имеет четыре экстремума: два минимума, которые совпадают с точками пересечения указанной поверхности с осью C , и два максимума, совпадающие с точками пересечения ее осью A . Последнее позволяет аргюги на равных расстояниях от начала координат разместить две отрицательные точечные массы на оси вращения планеты и две положительные точечные массы в плоскости экватора на оси A . Таким образом, зная параметры гравитационного квадруполья Земли и обозначая относительное расстояние от центра системы координат до одной из отрицательных точечных масс через D_1 , а относительное расстояние от центра до одной из положительных точечных масс — через D_2 , с помощью простых геометрических соотношений получаем

$$D_1 = D_2 \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}, \quad (17)$$

где ψ — угол между осями квадруполья (для Земли $\psi = 170^\circ, 8$). Введение последнего соотношения фактически сводит задачу к определению лишь двух неизвестных: расстояния D_1 (или D_2) и величины $\mu^{(2)}$ одной из точечных масс приближенной конструкции квадруполья. Кроме того, вместо решения системы нелинейных уравнений (15), (16) здесь оказалось более целесообразным выполнить просто согласование поля системы четырех точечных масс с полем V_2 , обусловленным стоксовыми постоянными второго порядка. Для этого потенциалы двух указанных полей сравнивали друг с другом в узлах картографической сетки ($10^\circ \times 10^\circ$). В этом случае при заданном конкретном значении D_1 получается переопределенная система линейных уравнений, которая решается по способу наименьших квадратов. В результате было найдено значение массы одного из зарядов квадруполья $\mu^{(2)}$. Счет выполнялся при различных D_1 : $0,1 \leq D_1 \leq 0,9$ (при шаге $h=0,1$), $0,02 \leq D_1 \leq 0,1$ ($h=0,01$), $0,01 \leq D_1 \leq 0,02$ ($h=0,0025$). Критерием качества получаемых приближенных конструкций квадруполья служили: среднеквадратическое δ_h и максимальное Δ_h отклонения уровенной поверхности, обусловленной потенциалом четырех точечных масс, относительно уровенной поверхности $V_2 = \text{const}$ и отличие Δ_μ массы $\mu^{(2)}$, вычисленной по способу наименьших квадратов, от массы $\mu^{(2)}$, рассчитанной по моменту реального квадруполья Земли (условие (16)). После анализа этих вычислений в качестве наилучшей была выбрана модель приближенной конструкции квадруполья, приведенная в табли-

це (1—4), для которой $\delta_h = 0,43$ м, $\Delta_h = 1,00$ м и $\Delta_\mu = 3 \cdot 10^{-4}$ массы Земли. Несмотря на то, что величины масс принятой модели квадриполя явно не позволяют перейти к геофизическому истолкованию последней, отметим все же хорошую согласованности поля $V^{(2)}$ четырех точечных масс с полем V_2 .

Параметры восьми точечных масс, аппроксимирующих потенциал гравитационного октаполя Земли, определялись на основании системы (14), решаемой методом наискорейшего спуска, а затем неизвестные уточнялись симплекс-методом. В качестве начальных приближений взяты примерные координаты экстремумов уровенной поверхности $V_3 = \text{const}$, а также некоторые значения для $\mu^{(3)}$ и D_j . Решение оказалось достаточно устойчивым, поскольку варьирование начальных приближений не привело к заметным изменениям неизвестных. Как видно из уравнений (14) и (15), массы некоторой приближенной конструкции мультиполя вносят вклад во все стоксовы постоянные ряда (11) либо нечетного, либо четного порядка. Поэтому, чтобы уровенная поверхность, обусловленная восемью точечными массами октаполя, совпадала бы с уровенной поверхностью $V_3 = \text{const}$, необходимо в уравнении (14) все стоксовы постоянные, кроме третьего порядка, принять равными нулю. Очевидно, на практике решение такой бесконечно большой системы нелинейных уравнений неосуществимо. Поэтому для нахождения масс октаполя мы ограничились системой из 21 уравнения, в которой стоксовы постоянные третьего порядка соответствовали SAO(III) [16], а постоянные первого и пятого порядков приравнявались нулю. Гармонические коэффициенты высших степеней и отвечающие им уравнения не учитывались. После решения такой системы методом спуска и ее уточнения симплекс-методом, перевычислялось значение масс приближенной конструкции октаполя, для чего потенциал последних сравнивался в узлах картографической сетки ($10^\circ \times 10^\circ$) с потенциалом V_3 , и полученная система линейных уравнений решалась по способу наименьших квадратов. Несмотря на «хорошее» значение среднеквадратического отклонения уровенной поверхности потенциала восьми точечных масс $V^{(3)} = \text{const}$ относительно поверхности $V_3 = \text{const}$, в отдельных точках максимальные отклонения достигали 10 м. Поэтому обсуждаемую переопределенную систему линейных уравнений оказалось целесообразно решать методом чебышевских приближений под условием $v_{\max} = \min$. При этом значение максимального отклонения удалось уменьшить вдвое. Полученная модель приближенной конструкции октаполя (восьми точечных масс) приведена в таблице (5—12). Она характеризуется $\sigma_h = 2,5$ м и $\Delta_h = 5$ м.

В таблице сведены предлагаемые параметры модели двенадцати точечных масс, которая вместе с точечной массой, равной массе Земли и расположенной в начале системы координат, аппроксимирует главную часть потенциала притяжения Земли (SAO(III) [16]), описываемую потенциалами (шаровыми функ-

циями) нулевого V_0 , второго V_2 и третьего V_3 порядков. Теперь основная часть гравитационного потенциала Земли в любой внешней точке может быть вычислена по следующей формуле:

$$V_M(r, \vartheta, \lambda) = fM \left[\frac{1}{r} + \sum_{i=1}^{12} \frac{\mu_i}{\rho_i} \right], \quad (18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \rho_i &= \sqrt{r^2 + (D_i)^2 a^2 - 2rD_i a \cos \gamma_i}; \\ \cos \gamma_i &= \cos \vartheta_i \cos \vartheta + \sin \vartheta_i \sin \vartheta \cos (\lambda - \lambda_i). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

С помощью последних соотношений были найдены ондуляции уровенной поверхности $V_M = \text{const}$ предлагаемой модели точечных масс относительно поверхности эллипсоида вращения (со сжатием $\alpha = 1/298,256$ [16]). Полученная карта высот представлена на рисунке.

Параметры модели двенадцати точечных масс

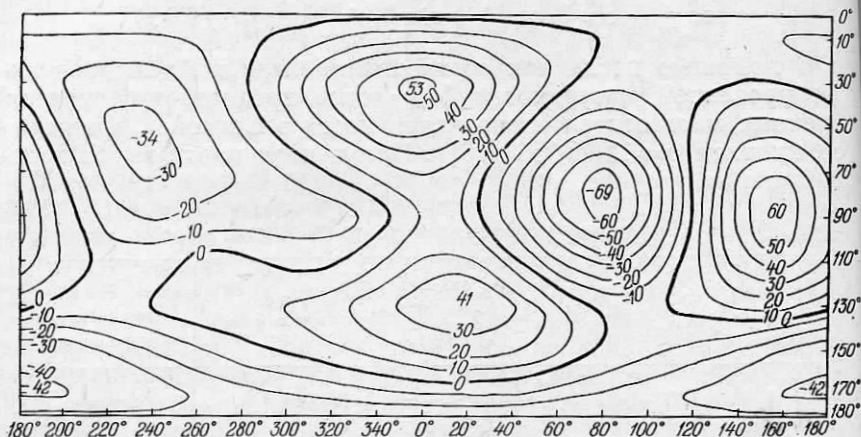
i	ϑ_i , град.	λ_i , град.	D_i , ед. экваториального радиуса SAO (III)	μ_i , ед. массы Земли	Примечание
1	0	0	$0,125 \cdot 10^{-1}$	-3,4528	Приближенная конструкция квадриполя
2	90	165,08	$0,101 \cdot 10^{-2}$	3,4528	
3	180	0	$0,125 \cdot 10^{-1}$	-3,4528	
4	90	345,08	$0,101 \cdot 10^{-2}$	3,4528	
5	44,64	216,34	0,563	$-0,5699 \cdot 10^{-5}$	Приближенная конструкция октаполя
6	135,36	36,34	0,563	$0,5699 \cdot 10^{-5}$	
7	152,92	179,28	0,637	$-0,5699 \cdot 10^{-5}$	
8	27,08	359,28	0,637	$0,5699 \cdot 10^{-5}$	
9	91,82	328,54	0,594	$-0,5699 \cdot 10^{-5}$	
10	88,18	148,54	0,594	$0,5699 \cdot 10^{-5}$	
11	71,34	79,28	0,579	$-0,5699 \cdot 10^{-5}$	
12	108,66	259,28	0,579	$0,5699 \cdot 10^{-5}$	

Эта карта фактически показывает общий вклад первых трех членов ($V_0 + V_2 + V_3$) разложения внешнего гравитационного потенциала в ряд по шаровым функциям в фигуру геоида. Причем сравнение уровенной поверхности $V_M = \text{const}$ (см. рисунок) с геоидальной поверхностью, построенной по полному набору стоксовых постоянных SAO(III) [16], позволяет сделать следующие выводы:

1. Основные особенности фигуры геоида в целом хорошо описываются обсуждаемой моделью двенадцати точечных масс. Среднеквадратическое отклонение поверхности $V_M = \text{const}$ относительно поверхности геоида SAO (III) составляет примерно 16 м, а среднеквадратическое отклонение поверхности $V_M = \text{const}$ относительно поверхности геоида SAO(III), построенной с учетом стоксовых постоянных только третьего порядка включительно, составляет примерно 3 м.

2. На рисунке хорошо просматривается трехосность и грушевидность Земли, а также «бугорчатое» в долготном отношении строение геоида.

3. Наибольшее соответствие поверхности $V_M = \text{const}$ с геоидом SAO(III) наблюдается для восточного полушария, значительно меньшее — для западного (модель двенадцати точечных масс, в частности, не выделяет одного минимума и одного максимума, расположенных в близэкваториальной области геоидальной поверхности с долготами $\lambda \approx 270-320^\circ$).



Ондуляция урвненной поверхности (в метрах) модели точечных масс относительно эллипсоида вращения ($a=6378140$ м, $\alpha=1/298,256$).

Полученная здесь модель представления главной части внешнего гравитационного поля Земли ($V_0 + V_2 + V_3$) является, очевидно, оптимальной как по числу точечных масс, так и по их расположению. Например, в работе [12] двенадцатью точечными массами, расположенными на сфере определенного радиуса, аппроксимировалась аномальная часть относительно потенциала эллипсоида вращения разложения потенциала Земли в ряд по шаровым функциям до четвертого порядка. Среднеквадратическое уклонение составило там 7 м, что значительно хуже, чем для нашей модели (3 м). Тем более, что в последней двенадцать точечных масс представляют аномальную часть относительно потенциала шара разложения гравитационного потенциала планеты до третьего порядка. Таким образом, приведенная в таблице модель двенадцати точечных масс аппроксимирует ондуляции геоида порядка сжатия и квадрата сжатия, тогда как модель из работы [12] аппроксимирует только ондуляции порядка квадрата сжатия Земли.

Отметим, что попытки изменить параметры найденных точечных масс модели и уменьшить их число не привели к положительным результатам. Поэтому на основании отмеченных выше качественных характеристик полученной тринадцатито-

ческой модели (см. таблицу) можно считать, что она хорошо описывает главную часть геопотенциала, соответствующую низшим членам его разложения (до третьего порядка включительно), т. е. достаточно полно представляет его глобальные особенности. Эта модель может служить основой для построения детальной многоточечной модели (типа (18)), однородно представляющей гравитационный потенциал вне Земли и на ее физической поверхности.

Список литературы: 1. Бровар В. В., Юзефович А. П. Параметры лунных масконов. — В сб.: Современные проблемы позиционной астрономии. XIX астрономическая конференция СССР, 1972. М., 1975. 2. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., Иностранная л-ра, 1952. 3. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М., Высшая школа, 1970. 4. Марченко А. Н. О вычислении моментов гравитационных мультиполей Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1977, вып. 25. 5. Мещеряков Г. А. О мультипольном представлении гравитационного потенциала. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1974, вып. 19. 6. Мещеряков Г. А., Марченко А. Н. Нахождение осей гравитационных мультиполей Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1977, вып. 25. 7. Мещеряков Г. А., Дейнека Ю. П. Внешнее гравитационное поле Земли и ее трехмерные модели. Материалы XI Конгресса КБГА. Киев, Наукова думка, 1977. 8. Мельхиор П. Физика и динамика планет, т. 1. М., Мир, 1975. 9. Ananda M. Farside lunar gravity from a mass point model, Proc. Lunar Sci. Conf. 6th (1975), V. 3. 10. Balmino G. Representation of the Earth Potential by Buried Masses. — Use Artif. Satell. Geod. Washington, D. C. 1972. 11. Dobaczewska W. Okresleme potencjalu sily ciezkosci Ziemi metoda mas punktowych. — Geodezja i kartografia, 1974. 12. Hardy R. L. Research Results in the Application of Multiquadric Equations to Surveying and Mapping Problems. — Surveying and Mapping, 1975, V. 35, N 4. 13. Hardy R. L., Göpfert W. M. Least squares prediction of the gravity anomalies, geoidal undulation, and deflections of the vertical with multiquadric harmonic functions. — Geoph. research letters, 1975, V. 2, N 10. 14. Levie S. L. Jz. Simple mass distribution for the Lunar potential. — The Moon, 1971, V. 3, N 3. 15. Maxwell G. I. A treatise on Electricity and Magnetism, V. 1.2nd edition, Oxford, 1881. 16. Smithsonian Standart Earth (III) Smiths. — Astroph. Observat. special report, 1973, N 353.

Работа поступила в редколлегию 4 января 1978 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.