КАРТОГРАФИЯ

УДК 528.9

Б. Б. СЕРАПИНАС

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЙ ОБЪЕМОВ РЕГУЛЯРНЫМИ ТОЧЕЧНЫМИ СЕТКАМИ

Существует ряд способов вычислений объемов по картам. Многие из них связаны с измерением площадей. При извилис-
том рисунке контура и малых заложениях изолиний эти спо-
собы становятся довольно трудоемкими. Поэтому в географи-
ческой практике широко применяют способ вычисления объемов,
основанный на использовании точечных сеток и не требующий
измерений площадей по картам. Для этого достаточно размес-
тить на карте регулярную сетку точек, определить высоту по-
верхности в каждой точке, суммировать их и умножить на
площадь основания палетки. Способ находит применение, на-
пример, при определении объемов снесенного и отложенного
материала, объемов осадков, поверхностного и подземного сто-
ков, запасов воды в снежном покрове, объемов ледников,
озерных или океанических котловин и т. п. [1]. В данной ра-
боте рассматривается оценка точности таких измерений.

Объем тела, ограниченного поверхностью $f(x, y)$ и занимаю-
щего на карте площадь P,

$$V = \iint_P f(x, y)\, dx\, dy. \tag{1}$$

При использовании точечных сеток высоты этой поверхности
определяют лишь в дискретных точках (x_i, y_i) и получают не-
которую оценку объема

$$V_j = \omega \sum_P f(x_i, y_i), \tag{2}$$

где ω — площадка на карте, соответствующая одной точке сет-
ки. Обычно используют квадратные или гексагональные сетки.
При заданном строении сетки выбор точек (x_i, y_i) зависит от
способа ее наложения на карту и является случайным. Поэтому
оценка объема V_j также есть величина случайная и точность
измерений определяется дисперсией этой случайной величины.

Предположим, что выбор точек (x_i, y_i) определяется вектором [5]:

$$X = A(N+M), \tag{3}$$

где X, N, M — двухмерные векторы; A — квадратная матрица второго порядка. Матрица A определяет строение сетки. Например, если точки расположены в вершинах квадратов или равносторонних треугольников (квадратные или гексагональные сетки) и расстояние между смежными точками равно a, то соответственно имеем:

$$A = a\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}; \; A = a\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Если точки находятся в вершинах прямоугольников со сторонами a и aT, то

$$A = a\begin{bmatrix} 1 & \\ & T \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Элементами вектора N являются целые числа, вектора M — неотрицательные дробные числа μ и ν. Таким образом, вектор N определяет регулярное расположение точек сетки на карте, вектор M — случайное наложение этой сетки на карту.

Подставляя уравнение (3) в (2), получаем

$$V_j = \omega \sum_P f(X) = V(\mu, \nu), \tag{6}$$

Результат измерений зависит от выбора μ и ν. Функция $V(\mu, \nu)$ является периодической с периодами $T_\mu = T_\nu = 1$. Действительно, если μ, ν изменить на единицу, т. е. сетку на карте сместить ровно на одну ячейку, то результат измерений объема не изменится. Из существа задачи измерений объемов тел по карте следует, что на этом отрезке функция $V(\mu, \nu)$ ограниченная и кусочно-непрерывная. Разложим ее в ряд Фурье.

$$V(\mu, \nu) = \sum_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} C_K \exp[i2\pi K^T M],$$

где K — двухмерный вектор, компонентами которого являются целые числа;

$$C_K = \int_0^1\int_0^1 V(\mu, \nu) \exp[-i2\pi K^T M]\, d\mu\, d\nu.$$

Учитывая, что $dX = dxdy = \omega d\mu d\nu$, последнее выражение на основании формул (3) и (6) можно представить в следующем виде:

$$C_K = \iint\limits_P f(X) \exp\left[-i2\pi K^T A^{-1} X\right] dX. \tag{7}$$

Приняв $K=0$, получим математическое ожидание случайной величины V_j, т. е. объем измеряемого тела

$$C_0 = E(V_j) = V = \iint\limits_P f(X) dX. \tag{8}$$

Дисперсию этой случайной величины найдем из выражения

$$D_V = E(V_j^2) - [E(V_j)]^2. \tag{9}$$

Отсюда, используя теорему Парсеваля, получаем формулу для дисперсии измерений объема тела

$$D_V = \sum_K{}' \, |C_K|^2, \tag{10}$$

где знак $\sum\limits_K{}'$ означает, что суммирование ведется по всем целым значениям k_1 и k_2 в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ за исключением случая $k_1 = k_2 = 0$.

Такова общая формула дисперсии объема, определяемого по случайно расположенной на карте регулярной сетке точек. Рассмотрим два частных случая.

Дисперсия определения объема тела, ограниченного полусферой. Пусть, например, определяется объем холма (впадины) в виде полусферы

$$f(X) = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}, \tag{11}$$

где R — радиус сферы. После подстановки формулы (11) в (7) и перехода от прямоугольных координат к полярным и интегрирования [2] получаем

$$C_K = 2^{3/2} \pi R^3 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) Z^{-3/2} J_{3/2}(Z), \tag{12}$$

где

$$Z = \frac{2\pi R}{\omega} \sqrt{(k_1 A_{22} - k_2 A_{21})^2 + (k_2 A_{11} - k_1 A_{12})^2}, \tag{13}$$

A_{ij} — элементы матрицы A. Подставляя в (12) выражения для гамма- и Бесселя-функций, определяем

$$C_K = 2\pi R^3 \left(\frac{\sin Z}{Z^3} - \frac{\cos Z}{Z^2}\right). \tag{14}$$

Приняв $k_1=k_2=0$, получаем объем полусферы

$$C_0 = \frac{2}{3}\pi R^3 = V. \tag{15}$$

В дальнейшем будем предполагать, что радиус сферы значительно больше расстояний между смежными точками сетки. Это позволит пренебречь первым членом выражения (14). Тогда формулу для дисперсии объема можно представить в виде

$$D_V = 9V^2 \sum_K{}' \left(\frac{\cos Z}{Z^2}\right)^2 = m_V^2, \tag{16}$$

где m_V — средняя квадратическая погрешность определения объема. Отсюда получаем формулы для средней квадратической и относительной средней квадратической погрешностей определения объема полусферы:

$$m_V = \pm\, \omega R \sqrt{C_V}; \quad (17) \qquad f_V\,\% = \pm\, \frac{150\omega}{\pi R^2}\sqrt{C_V}. \quad (18)$$

В выражениях (17) и (18)

$$C_V = \frac{p^2}{8\pi^2}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{r(t)}{t^2}\left(1+\cos\left(4\pi\frac{Rt^{1/2}}{\sqrt{\omega p}}\right)\right), \tag{19}$$

где параметры p, ω и t зависят от строения регулярной сетки; $r(t)$ — число способов получения величины t. Так, учитывая выражения (4) и (5), получаем:

а) для гексагональных сеток

$$t = k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2;\; p = \frac{\sqrt{3}}{2};\; \omega = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}; \tag{20}$$

б) для квадратных сеток

$$t = k_1^2 + k_2^2;\; p = 1;\; \omega = a^2; \tag{21}$$

в) для прямоугольных сеток

$$t = (k_1 T)^2 + k_2^2;\; p = T;\; \omega = a^2\, T. \tag{22}$$

Как видно из формулы (19), с увеличением радиуса R величина C_V не стремится к пределу, а периодически изменяется в границах

$$0 < C_V < 2\bar{C}_V, \quad (23) \qquad \text{где } \bar{C}_V = \frac{p^2}{8\pi^2}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{r(t)}{t^2}, \quad (24)$$

и является средним интегральным по радиусу R при $R\to\infty$ [5]. В практических расчетах удобнее использовать не формулу

(19), а более простую (24), учитывая при этом неравенства (23). Числовые значения величин $\overline{C}_V$, полученные по формуле (24) суммированием по t от 1 до 900 и проверенные при помощи $Z_\Lambda(S)$ функций [4; 5], приведены в табл. 1. Используя эти данные и формулы (17), (18), оцениваем точность определений объемов тел, близких по формуле к полусферам. Так, для оценки точности определения объема полусферы радиуса $R=5$ см (в масштабе карты) при помощи квадратной сетки с расстоянием между точками 1 см по формулам (17), (18) и данным табл. 1 получаем: $m_V=1\cdot 5\cdot 0{,}276=1{,}38$ см^3; $f_V\%=1\cdot 13{,}2:5^2=0{,}53\%$. Для проверки этих расчетов полусфера $R=5$ см была отображена изолиниями с высотами 0; 1; 2; 3; 4 и 4,5 см и ее объем определен десять раз квадратной палеткой с расстоянием между точками 1 см. Объем данной полусферы $V=262$ см^3 (15) рассматривали как истинное значение; по уклонениям измеренных величин от истинного значения получено: $m_V=1{,}35$ см^3, $f_V\%=0{,}52\%$. Таким образом, экспериментальные данные подтвердили расчетные величины,

Дисперсия определения объема тела, ограниченного горизонтальной плоскостью. Пусть определяется объем тела, ограниченного плоской поверхностью (равнина, плоскогорье). Высота этой поверхности над отсчетной будет $H=f(x, y)=\text{const}$. Тогда на основании формул (7) и (10) получаем

$$C_K = H\iint\limits_P \exp\left[-i2\pi K^T A^{-1} X\right] dX = HC'_K \qquad (25)$$

и

$$m_V^2 = H^2 \sum_K{}' \, |C'_K|^2. \qquad (26)$$

При $H=1$ уравнение (26) становится формулой дисперсии m_P^2 площади контура, определяемой по карте с помощью точечных сеток (палеток). Поэтому на основании (26) можно записать

$$m_V = H m_P. \qquad (27)$$

Аналитические выражения для дисперсии площади m_P^2 для таких фигур, как круг и прямоугольник, имеются в работах [3—6], причем формулы для круга получены при самых общих предположениях [5], для прямоугольников — найдены только для квадратных и прямоугольных сеток. Обобщим выводы последнего случая на более широкий класс сеток.

Пусть определяется объем прямоугольного параллелепипеда, грани которого параллельны координатным плоскостям, а размеры ребер равны h, l, H. Тогда, интегрируя равенство (25) в пределах от $-\frac{h}{2}$ до $+\frac{h}{2}$ и от $-\frac{l}{2}$ до $+\frac{l}{2}$, получаем

$$C_K = H\frac{\sin\pi\dfrac{h}{T_x}}{\pi\dfrac{1}{T_x}}\cdot\frac{\sin\pi\dfrac{l}{T_y}}{\pi\dfrac{1}{T_y}}, \tag{28}$$

где

$$\frac{1}{T_x} = \frac{k_1 A_{22} - k_2 A_{21}}{\omega}; \quad \frac{1}{T_y} = \frac{k_2 A_{11} - k_1 A_{12}}{\omega}. \tag{29}$$

Рассмотрим три частных случая, когда используются прямоугольные, квадратные и гексагональные сетки. Соответствующие формулы найдем, подставляя элементы матрицы A из формул (4) и (5) в (29), а затем в (28) и (26). Для получения конечных результатов необходимо подробнее рассмотреть следующее выражение:

$$Q = Q_1 + Q_2, \tag{30}$$

где

$$Q = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2\pi kl}{(\pi k)^2}; \ (31) \qquad Q_1 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2\pi(2k-1)l}{\pi^2(2k-1)^2}; \ (32)$$

$$Q_2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2\pi 2kl}{\pi^2(2k)^2}. \tag{33}$$

Пусть $l=n+q$, где n — целое число такое, что всегда выполняется условие

$$0 \leqslant q < 1. \ (34) \qquad \text{Тогда } Q = q(1-q). \ (35)$$

Действительно, разложив периодическую функцию $f(l) = q(1-q)$ в ряд Фурье, убедимся, что правые части в (35) и (31) равны. Выражение (33) легко свести к случаю (31), рассматривая вместо l отрезок $2l=2n+2q$, где $0\leqslant 2q<1$. Тогда из выражений (35) и (31) получаем:

$$Q_2 = \begin{cases} \left(q\dfrac{1}{2}-q\right), \text{ если } 0\leqslant q\leqslant\dfrac{1}{2}; \\ \left(q-\dfrac{1}{2}\right)(1-q), \text{ если } \dfrac{1}{2}\leqslant q<1. \end{cases} \tag{36}$$

Зная Q и Q_2, из выражения (30) находим:

$$Q_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}q, \text{ если } 0\leqslant q\leqslant\dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{1}{2}(1-q), \text{ если } \dfrac{1}{2}\leqslant q<1. \end{cases} \tag{37}$$

Учитывая сказанное выше и имея в виду, что при $x=0$ $\frac{\sin x}{x}=1$, получаем расчетные формулы для средних квадратических погрешностей m_V определения объема V прямоугольного параллелепипеда:

а) прямоугольными сетками

$$m_V = \pm \omega H \sqrt{Q_h Q_l + \left(\frac{h}{a}\right)^2 Q_l + \left(\frac{l}{b}\right)^2 Q_h}, \tag{38}$$

где l, h, H — размеры параллелепипеда; a, b — размеры прямоугольника, в вершинах которого расположены точки сетки,

Таблица 1

Параметры для оценки точности определения объема полусфер

Сетки	Гексагональные	Квадратные	Прямоугольные, $T=5$
$\overline{C}_V$	0,07 325	0,07 633	0,6947
$\sqrt{\overline{C}_V}$	0,271	0,276	0,834
$\frac{150}{\pi}\sqrt{\overline{C}_V}$	12,9	13,2	39,8

Таблица 2

Сравнение точности определений объемов параллелепипедов сетками различного строения

Объем lhH (см³)	Гексагональные сетки		Квадратные сетки	
	m_V (см³)	f_V %	m_V (см³)	f_V %
$4{,}2^2\cdot 1$	2,16	12,2	2,38	13,5
$8{,}7^2\cdot 1$	4,18	5,5	5,64	7,5

причем стороны a и h, b и l соответственно параллельны; $\omega=ab$;

б) для квадратных сеток в формуле (38) следует принять $b=a$;

в) для гексагональных сеток

$$m_V = \pm 2\omega H \sqrt{Q_{1h} Q_{1l} + Q_{2h} Q_{2l} + \left(\frac{h}{a}\right)^2 Q_{2l} + \left(\frac{l}{a\sqrt{3}}\right)^2 Q_{2k}}, \tag{39}$$

где $\omega=a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$. В гексагональных сетках точки расположены в вершинах равносторонних треугольников с длинами сторон a и высотами $a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Предполагается, что основания этих треугольников параллельны линии h, а высоты — линии l.

Величины Q с соответствующими первыми индексами определяются формулами (35)—(37). При этом для прямоугольных и квадратных сеток

$$q_h = \frac{h}{a} - n_h; \quad q_l = \frac{l}{b} - n_l. \tag{40}$$

Для гексагональных сеток q_h определяем по формуле (40), для q_l имеем

$$q_l = \frac{l}{a\sqrt{3}} - n_l. \tag{41}$$

Формулы (40) и (41) вскрывают геометрическую сущность величин q и Q и дают возможность сопоставлять по точности сетки различного строения. В практических расчетах удобнее задаваться числовыми значениями Q. При этом по малости можно пренебречь в (38) произведением $Q_h Q_l$, а в (39) — выражением $(Q_{1h}Q_{1l}+Q_{2h}Q_{2l})$. Кроме того, легко показать, что

$$0 \leqslant Q,\ 4Q_2 \leqslant \frac{1}{4}, \tag{42}$$

а среднее интегральное значение

$$4\overline{Q}_2 = \overline{Q} = \int_0^1 q\,(1-q)\,dq = \frac{1}{6}. \tag{43}$$

В качестве примера и с целью сопоставления по точности сеток различного строения по формулам (35)—(41) вычислены средние квадратические погрешности m_V для двух прямоугольных параллелепипедов размеров $4{,}2^2 \cdot 1$ см^3 и $8{,}7^2 \cdot 1$ см^3. Предполагалось, что использовались сетки с площадками $\omega = 1$ см^2. Вычислены также относительные погрешности по формуле

$$f_V\,\% = \pm\,\frac{100\,m_V}{lhH}. \tag{44}$$

Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Сравнивая данные табл. 1 и 2, замечаем, что по точности гексагональные сетки имеют определенные преимущества перед квадратными и особенно прямоугольными сетками.

Полученные в данной работе основные формулы (10), (17), (38) и (39) позволяют оценить точность определений объемов по измерениям в узлах случайно набрасываемых регулярных сеток, сопоставить по точности сетки различного строения и, исходя из требуемой точности определений, найти оптимальные расстояния между узлами. Такие расчеты могут оказаться полезными как для определений объемов палетками по картам, так и для вычислений численными методами при помощи ЭВМ.

Список литературы: 1. *Берлянт А. М.* Картографический метод исследования. — М.: Изд-во МГУ, 1978. 2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962. 3. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. — М.: Наука, 1972. 4. *Kendall D. G.* On the number of lattice points inside a random oval. — The quarterly journal of mathematics, 1948, v. 19, N 73. 5. *Kendall D. G., Rankin R. A.* On the number of points off a given lattice in a random hypersphere. — The quarterly journal of mathematics, 1953, v. 4, N 15. 6. *Russell A. M., Josephson N. S.* Measurement of area by counting. — Journal of applied probability, 1965, v. 2, N 2.

Работа поступила в редколлегию 7 декабря 1978 года. Рекомендована кафедрой картографии географического факультета Московского государственного университета.