УДК 528.21/22

И. Ф. МОНИН, д-р техн. наук
Львовский политехнический институт

К ВОПРОСУ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЙ ЗЕМЛИ

Внешнее гравитационное поле Земли вполне характеризуется потенциалом силы тяжести или его производными. Введя в рассмотрение замкнутую уровенную поверхность, близкую к геоиду (поверхность относимости), можно получить аномалии силы тяжести, высоты геоида относительно этой поверхности, уклонения отвеса и другие величины, при помощи которых также можно характеризовать гравитационное поле Земли. Эти величины, называемые элементами гравитационного поля Земли, определенным образом связаны друг с другом. Известны математические зависимости между элементами гравитационного поля Земли, найденные Д. Стоксом, Ф. Венинг Мейнесом, М. С. Молоденским, В. А. Магницким и др. [2].

В статье [3] выведены формулы, определяющие некоторые элементы гравитационного поля регуляризированной Земли. В качестве поверхности относимости принимали неуровенную сферу. Нормальное гравитационное поле Земли при этом не использовали. В связи с тем, что земная сфера довольно грубое приближение фигуры Земли, возникли [1] сомнения относительно пригодности полученных формул для практического применения. Поэтому в работе [4] было показано, как применять нормальное поле Земли, чтобы формулы, полученные в статье [3], имели практическое значение, поскольку при практическом применении этих формул обязательно придется использовать нормальное поле (во избежание операций с большими величинами).

Исследования [4] касались в основном формулы, обратной по своему смыслу формуле Стокса. Другие соотношения, имеющиеся в статье [3], приведены к удобному виду для практического применения по аналогии.

Для убедительности исследований [4] и устранения имеющихся сомнений [1] проверим на модели, подходящей к геоиду Земли, формулы. полученные в статьях [3, 4]:

$$\Delta g = -\frac{\zeta_0}{a} g_e - \frac{g_e}{2\pi} \int \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3} dS + \frac{W_0 - U_0}{a}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial n^2} = \frac{4\Delta g_0}{a} + \frac{6\zeta_0}{a^2} g_e - \frac{2}{a^2}(W_0 - U_0) - \frac{1}{2\pi} \int \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r^3} dS; \tag{2}$$

$$\Delta g = -\frac{\zeta_0}{a} g_e - \frac{g_e}{2\pi a} \int \frac{\partial \zeta}{\partial r} \left(\frac{a}{r^2} - \frac{1}{2r} \right) dS + \frac{W_0 - U_0}{a}; \tag{3}$$

$$\zeta_0 = \frac{W_0 - U_0}{g_e} - \frac{1}{4\pi a g_e} \int \Delta g dS - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \zeta}{\partial r} \left(\frac{2}{r} - \frac{r}{2a^2} \right) dS, \tag{4}$$

где $\Delta g = g - \gamma$; $r = 2a \sin \frac{\psi}{2}$; $dS = a^2 \sin \psi d\psi dA = r dr dA$; W_0, g — гравитационный потенциал и сила тяжести на геоиде; U_0, γ — нормальные их значения на уровенном земном эллипсоиде, большая полуось которого равна a; T — возмущающий потенциал, равный $W - U_0$, Δg — аномалия силы тяжести, n — внешняя нормаль геоида; r, ψ — линейное и угловое расстояние между фиксированной и текущей точками земной сферы (начало координат принято в центре сферы); dS — элемент ее поверхности; ζ, ζ_0 — высоты геоида относительно земного эллипсоида в текущей и фиксированной точках; A — азимут направления из фиксированной точки на текущую; g_e — экваториальная постоянная силы тяжести.

В качестве геоида модели примем земной эллипсоид Красовского. За отсчетную поверхность возьмем эллипсоид вращения, у которого большая полуось такая же, как в эллипсоиде Красовского, а малая на 100 м больше; центры эллипсоидов совпадают с центром земной сферы. Данная модель, как показано в работе [5], имеет такие характеристики гравитационного поля:

$$\Delta g = g_e \Delta\beta \sin^2 \Phi; \tag{5}$$

$$W_0 - U_0 = -\frac{2}{3} a g_e \Delta\alpha; \; \zeta = -a\Delta\alpha \sin^2 \Phi, \tag{6}$$

где $\Delta\alpha = 0{,}0000157$; $\Delta\beta = -0{,}0000158$.
Здесь $\Delta\alpha$ — разность в сжатиях по меридиану эллипсоидов; $\Delta\beta$ — разность постоянных β нормальных формул для силы тяжести на уровенных эллипсоидах; Φ — геоцентрическая широта. Отметим, что значения Δg, ζ, W_0—U_0 получены как разности соответствующих значений для геоида и уровенного эллипсоида из соотношений

$$g = g_e (1 + \beta \sin^2 \Phi + \cdots); \quad \rho = a(1 - \alpha \sin^2 \Phi + \cdots);$$

$$W = a g_e \left(1 - \frac{2}{3}\alpha + \frac{11}{6} q + \cdots\right).$$

Вычислим аномалии силы тяжести Δg по формуле (1). Для этого подставим в нее данные модели

$$\Delta g = -\frac{g_e}{a}(-a\Delta\alpha \sin^2 \Phi) - \frac{g_e}{2\pi}(-a\Delta\alpha)\left(-\sin^2 \Phi + \frac{1}{3}\right)\frac{4\pi}{a} +$$

$$+ \frac{-\frac{2}{3} a g_e \Delta\alpha}{a} = -g_e \Delta\alpha \sin^2 \Phi, \tag{7}$$

причем учтем значение интеграла

$$\int \frac{\sin^2 \Phi - \sin^2 \Phi_0}{r^3} dS = \frac{4\pi}{a}\left(\frac{1}{3} - \sin^2 \Phi_0\right). \tag{8}$$

Сравнение выражений (5) и (7) свидетельствует о том, что по формуле (1) можно вычислять Δg на геоиде с относительной погрешностью порядка сжатия Земли.

Точно так же выполним для принятой модели вычисления по формуле (2):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial n^2} = \frac{4}{a}\Delta\beta \sin^2\Phi + \frac{6}{a^2} g_e(-a\Delta\alpha \sin^2\Phi) - \frac{2}{a^2}\left(-\frac{2}{3} a g_e \Delta\alpha\right) - \frac{1}{2\pi} g_e \Delta\beta \frac{4\pi}{a}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\Phi\right) = \frac{6}{a} g_e(\Delta\beta - \Delta\alpha)\sin^2\Phi + \frac{2}{3}\cdot\frac{g_e}{a}(2\Delta\alpha - \Delta\beta). \tag{9}$$

Известно, что на поверхности регуляризированного геоида

$$\frac{\partial^2 T}{\partial n^2} = -\frac{\partial\Delta g}{\partial n} + \frac{2\Delta g}{a} + \frac{6T}{a^2} - \frac{6}{a^2}(W_0 - U_0); \tag{10}$$

$$\frac{\partial\Delta g}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial\gamma_0}{\partial n} + \frac{2\Delta g}{a};\ T = g_e\zeta + W_0 - U_0, \tag{11}$$

где $\partial g/\partial n$ относится к поверхности геоида, а $\partial\gamma_0/\partial n$ — к поверхности уровенного эллипсоида. Формулы (10) и (11) записаны с относительной погрешностью порядка сжатия Земли. Пользуясь известной формулой для уровенного эллипсоида

$$\frac{\partial g}{\partial n} = -\frac{2g_e}{a}\left[1 + q + \alpha + \left(\frac{5}{2}q - \alpha\right)\sin^2\Phi + \cdots\right],$$

где $q=\omega^2 a/g_e$; ω — угловая скорость суточного вращения Земли, для данной модели из соотношения (11) найдем

$$\frac{\partial\Delta g}{\partial n} = -\frac{2g_e}{a}\Delta\alpha(1 - 3\sin^2\Phi) + \frac{2g_e}{a}\Delta\beta\sin^2\Phi,$$

а из выражения (10) получим

$$\frac{\partial^2 T}{\partial n^2} = \frac{2g_e}{a}\Delta\alpha(1 - 3\sin^2\Phi) - \frac{2g_e}{a}\Delta\beta\sin^2\Phi + \frac{2g_e}{a}\Delta\beta\sin^2\Phi + \frac{6}{a^2}\left(-a g_e\Delta\alpha\sin^2\Phi - \frac{2}{3}\Delta\alpha g_e a\right) + \frac{6}{a^2}\cdot\frac{2}{3} a g_e\Delta\alpha = -\frac{12}{a} g_e\Delta\alpha\sin^2\Phi + \frac{2}{a} g_e\Delta a. \tag{12}$$

Сравнивая выражения (9) и (12), видим, что формула (2) тоже верна с относительной погрешностью порядка сжатия Земли.

Прежде чем проверить формулу (3), заметим, что ее можно получить из формулы (1), выполняя в интегральном выражении последней интегрирование по частям:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2a}\frac{\zeta-\zeta_0}{r^3}rdrdA=\begin{vmatrix} u=\zeta-\zeta_0, & dv=\dfrac{dr}{r^2} \\ \partial u=\partial\zeta, & v=-\dfrac{1}{r}\end{vmatrix}=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{\zeta-\zeta_0}{r}\Bigg|_0^{2a}+\int_0^{2a}\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial r}\cdot dr\right]dA=-\frac{\pi}{a}(\zeta_\pi-\zeta_0)+$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{2a}\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial r}\cdot rdrdA=-\frac{\pi}{a}(\zeta_\pi-\zeta_0)+\int\frac{\partial\zeta}{\partial r}\cdot\frac{dS}{r^2}, \qquad (13)$$

где ζ_π—ζ_0 — значения высот геоида при $r=2a$ и $r=0$.

В работе [2] показано, что разность ζ_π—ζ_0 можно получить по формуле

$$\zeta_\pi-\zeta_0=\frac{1}{2\pi a^2}\int\frac{\partial\zeta}{\partial\psi}\cdot\frac{dS}{\sin\psi},$$

которая, с учетом замены дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial\psi}=\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial\psi}=\frac{a^2\sin\psi}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r},$$

имеет вид

$$\zeta_\pi-\zeta_0=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial\zeta}{\partial r}\cdot\frac{dS}{r}. \qquad (14)$$

После этих преобразований убеждаемся, что из формулы (1), заменяя в ней интеграл выражениями (13) и (14), легко получить формулу (3). Следовательно, проверять правильность формулы (3) нет смысла.

Приведем теперь подробный вывод формулы (4). Введя некоторую среднюю высоту геоида ζ_m, определяемую по формуле

$$\zeta_m=\frac{1}{2\pi a^2}\int\zeta dS, \qquad (15)$$

и выполняя в ней интегрирование по частям

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2a}\zeta rdrdA=\begin{vmatrix} u=\zeta, & dv=rdr \\ du=d\zeta, & v=\dfrac{r^2}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\zeta r^2}{2}\Bigg|_0^{2a}-\int\frac{\partial\zeta}{\partial r}\cdot\frac{r^2}{2}dr\right]dA=4\pi a^2-\int\frac{\partial\zeta}{\partial r}\cdot\frac{r}{2}dS,$$

из выражений (15) и (14) находим

$$\zeta_0 = \zeta_m - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \zeta}{\partial r} \left(\frac{2}{r} - \frac{r}{2a^2} \right) dS.$$

Воспользовавшись известным [4] соотношением

$$\frac{g_e}{4\pi a^2} \int \zeta dS = W_0 - U_0 - \frac{1}{4\pi a} \int \Delta g dS,$$

получаем формулу (4).

Таким образом, изложенные выше рассуждения позволяют сделать вывод, что предложенные в работе [3] формулы вполне пригодны для практического применения. Погрешность вычисления по ним элементов гравитационного поля регуляризированной Земли равна произведению определяемого элемента на сжатие земного эллипсоида.

Список литературы: 1. *Мигаль Н. К.* Относительно статьи И. Ф. Монина «О методе изучения фигуры Земли без использования нормального поля». — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1963, вып. 6. 2. *Молоденский М. С.* Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. — Тр. /ЦНИИГАиК, 1960, вып. 131. 3. *Монин И. Ф.* К теории гравитационного поля регуляризированной Земли.— Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1960, вып. 3. 4. *Монин И. Ф.* О практическом применении некоторых соотношений гравитационного поля регуляризированной Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1976, вып. 23. 5. *Монин И. Ф.* К определению фигуры Земли с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия земного эллипсоида. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1962, вып. 4.

Работа поступила в редколлегию 31 октября 1977 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.