УДК 528.71

М. А. БЛЮМИН

СТЕРЕОКИНОФОТОГРАММЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАТФОРМЫ

Применение стереофотограмметрической киносъемки для изучения движущихся объектов позволяет получить их геометрические и кинематические характеристики в режиме движения, расширяя возможности дистанционного определения состояния машин, механизмов и их узлов в процессе работы.

Рассмотрим методику определения угловой скорости по стереопарам киносьемки, учитывая, что ряд точек вращающейся платформы изображается на разных стереопарах, интервал времени между которыми определяется по известной скорости киносъемки, фиксируемой с помощью тахометра.

Угловая скорость вращения определяется отношением $w = \varphi/\Delta t$, где φ — угол, определяемый двумя мгновенными векторами R_1 и R_2, связывающими центр вращения платформы с положениями точки за промежуток времени Δt.

Выразим этот угол через фотограмметрические координаты двух положений вращающейся точки:

$$\varphi = \arccos \times$$

$$\times \left[\frac{(X_1 - X_0)(X_2 - X_0) + (Y_1 - Y_0)(Y_2 - Y_0) + (Z_1 + Z_0)(Z_2 - Z_0)}{R_1 R_2} \right]. \quad (1)$$

Здесь текущие координаты точки $X_{1,2}$, $Y_{1,2}$, $Z_{1,2}$ в процессе вращения платформы получаем по известным зависимостям прямой фотограмметрической засечки. Координаты центра вращения X_0, Y_0, Z_0 и значения радиусов R определяем по текущим координатам точек, число которых $n \geqslant 3$.

Чтобы найти координаты центра вращения и радиус, рассмотрим уравнения шара и окружности, записанные под условием компланарности векторов:

$$(X_i - X_0)^2 + (Y_i - Y_0)^2 + (Z_i - Z_0)^2 = R_i^2;$$

$$\begin{vmatrix} (X_i - X_0)(Y_i - Y_0)(Z_i - Z_0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i = n \geqslant 3 \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

где координаты представлены в фотограмметрической системе с началом в левом центре проекции, и преобразуем уравнение (1). Введем сокращенные обозначения:

$$X_i X_0 + Y_i Y_0 + Z_i Z_0 + T + L_i = 0 \text{ при } i \geqslant 3;$$

$$E_i X_0 + F_i Y_0 + Q_i Z_0 + l_i = 0 \text{ при } i > 3, \tag{3}$$

где $T = R^2 - (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2)$; $L = -\dfrac{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}{2}$.

Поставим для выражений (2) условие, согласно которому центр вращающейся окружности должен располагаться в плоскости, определяемой уравнением $A'X + B'Y + C'Z + D' = 0$.

Если $C \neq 0$, то $AX + BY + Z + D = 0$, и коэффициенты этого уравнения можно определить из решения следующей системы:

$$\begin{cases} AX_i + BY_i + Z_i + D = 0, \\ \qquad i \geqslant 3. \end{cases}$$

Если теперь систему уравнений (3) записать в виде

$$\begin{cases} X_i X_0 + Y_i Y_0 + Z_i Z_0 + T + L_i' = 0, \\ \qquad i \geqslant 3 \end{cases} \tag{4}$$

при условии $AX_0 + BY_0 + Z_0 + D = 0$, то из уравнений (4) будем иметь:

$$Z_0 = -AX_0 - BY_0 - D; \tag{5}$$

$$(X_i - AZ_i) X_0 + (Y_i - BZ_i) Y_0 + T + L_i' = 0, \tag{6}$$

где $L_i' = -\dfrac{1}{2}(X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 + DZ_i)$.

Решив уравнения (6), определим координаты центра окружности X_0, Y_0 и с их помощью Z_0 в соответствии с формулой (5). Радиус окружности $R_i^2 = (X_i - X_0)^2 + (Y_i - Y_0)^2 + (Z_i - Z_0)^2$.

Погрешность определения угловой скорости вращения платформы получаем, дифференцируя исходное выражение $\omega = \varphi : \Delta t$. После дифференцирования и перехода к средним квадратическим ошибкам будем иметь

$$m_\omega^2 = \left(\frac{\varphi}{\Delta t^2}\right)^2 m_{\Delta t}^2 + \frac{1}{\Delta t^2} m_\varphi^2 = \frac{1}{\Delta t^2}(\omega^2 m_{\Delta t}^2 + m_\mu^2). \tag{7}$$

Дифференцируя выражение (1), получаем

$$m_\varphi^2 = \frac{\varphi}{1 - \cos_\varphi^2}\Big\{[k_1 m_X^2 + k_2 m_{X_0}^2 + k_3 m_Y^2 + k_4 m_{Y_0}^2 + k_5 m_Z^2 +$$

$$+ k_6 m_{Z_0}^2] \frac{1}{R_1^2 \cdot R_2^2} + \cos^2\varphi \Big[\frac{1}{R_1^2}(\cos^2\alpha_1 m_X^2 + \cos^2\beta_1 m_Y^2 +$$

$$+\cos^2\gamma_1 m_Z^2+\cos^2\alpha_1 m_{X_0}^2+\cos^2\beta_1 m_{Y_0}^2+\cos^2\gamma_1 m_{Z_0}^2)+$$

$$+\frac{1}{R_2^2}(\cos^2\alpha_2 m_X^2+\cos^2\beta_2 m_Y^2+\cos^2\gamma_2 m_Z^2+\cos^2\alpha_2 m_{X_0}^2+$$

$$\left.+\cos^2\beta_2 m_{X_0}^2+\cos^2\gamma_2 m_{Z_0}^2)]\right\},\qquad(8)$$

где

$$k_1=(X_1^2+X_2^2+2X_0^2);\; k_2=(X_1^2+X_2^2+4X_0^2);$$

$$k_3=(Y_1^2+Y_2^2+2Y_0^2);\; k_4=(Y_1^2+Y_2^2+4Y_0^2);$$

$$k_5=(Z_1^2+Z_2^2+2Z_0^3);\; k_6=(Z_1^2+Z_2^2+4Z_0^2);$$

α, β, γ — направляющие косинусы радиусов-векторов R_1 и R_2. Учтем, что фотограмметрическая съемка производится кинокамерами с полезным форматом кадра 14×20 мм и фокусным расстоянием 100 мм. Если фокусное расстояние на порядок превышает значения координат точек снимка, то

$$m_X\approx m_Z\approx 0{,}1 m_Y.\qquad(9)$$

Для упрощения оценочных расчетов перенесем начало координат в центр вращения платформы и примем $R_1=R_2$. В этом случае $X_0=Y_0=Z_0$ и $m_{X_0}=m_{Z_0}=m_{Y_0}$.

Тогда выражение (8) можно записать следующим образом:

$$m_\varphi^2=\frac{1}{R^2\sin^2\varphi}\{[0{,}01(1+\cos^2\varphi)(\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\gamma_1+$$

$$+\cos^2\gamma_2)+\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2]\,m_Y^2+(1+\cos^2\varphi)\times$$

$$\times(\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_2)\,m_{Y_0}^2.\qquad(10)$$

Преобразуем формулу (10), исходя из следующего:

$$\cos^2\alpha_i+\cos^2\beta_i+\cos^2\gamma_i=1;\;\frac{1+\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}=1+2\operatorname{ctg}^2\varphi;$$

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\beta_1-\cos^2\beta_1+$$

$$+\cos^2\beta_2-\cos^2\beta_2.$$

С учетом формулы (9) выражение (10) представим в виде

$$m_\varphi^2=\frac{1}{R^2}(1+2\operatorname{ctg}^2\varphi)[(0{,}02+\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2)\,m_Y^2+2m_{Y_0}^2].\qquad(11)$$

Приняв для направляющих косинусов угла β их среднее интегральное значение при вертикальном положении оси вращения платформы, преобразуем уравнение (11):

$$m_\varphi^2=\frac{1}{R^2}(1+2\operatorname{ctg}^2\varphi)(m_Y^2+2m_{Y_0}^2).$$

Формула (7) для оценки точности определения угловой скорости при $m_Y = m_{Y_0}$ будет иметь следующий вид:

$$m_{\omega}^2 = \frac{1}{\Delta t^2}\left[\omega^2 m_{\Delta t}^2 + \frac{3}{R^2}(1+2\operatorname{ctg}^2\varphi)\, m_Y^2\right], \tag{12}$$

или для значения угла φ, близкого к 90°

$$m_{\omega}^2 = \frac{1}{\Delta t^2}\left(\omega^2 m_{\Delta t}^2 + \frac{3}{R^2} m_Y^2\right),$$

где величина $m_{\Delta t}$ равна обратному значению скорости киносъемки, что соответствует погрешности определения интервала времени для одного стереокинокадра.

Предложенная методика была реализована при определении угловой скорости вращающейся платформы диаметром около 14 м. Стереофотограмметрическую киносьемку производили двумя синхронно работающими кинокамерами «Конвас» со скоростью 40 кадров в секунду. Базис съемки составлял 2,5 м, его отстояние от оси вращения платформы было равным 36 м. Фокусные расстояния камер 75 мм, формат кадра 22×16 мм. Коррекцию координат и продольных параллаксов точек стереомоделей за влияние угловых элементов внешнего ориентирования и несовпадения начала координат снимка с положением его главной точки производили по истинным значениям координат и параллаксов опорных точек, зафиксированных на всех обрабатываемых стереопарах, по известной методике *.

Фотограмметрические измерения выполняли на стереокомпараторе Цейсс 1818, причем в измерения включали точки платформы, расположенные по ее краю ($R_Б = 7$ м) и в средней части ($R_М = 3$ м). Стереопары выбирали таким образом, что интервал времени Δt между двумя зафиксированными положениями идентичных точек составлял 0,625 с, погрешность его определения $\pm 0{,}025$ с.

Ниже приведены результаты определения угловой скорости:

$$X_0 = -0{,}72\text{ м};\ Y_0 = 36{,}15\text{ м};\ Z_0 = 1{,}39\text{ м};\ R_Б = 6{,}64\text{ м};$$

$$R_М = 2{,}85\text{ м};\ \varphi_{ср} = 34°{,}5;\ \omega_{ср} = 0{,}96\text{ рад/с}.$$

Угловую скорость определяли по положениям шести точек, расположенных по три на большом и малом радиусах. При этом максимальное расхождение скорости составило 0,09 рад/с при предельно допустимом ее расхождении $\Delta_{\omega} = 2m_{\omega}\sqrt{2} = 0{,}11$ рад/с. где, согласно (12), $m_{\omega} = \pm 0{,}038$ рад/с.

---

* *Блюмин М. А.* Стереофотограмметрическая съемка инженерных взрывов. — М.: ВАГО при АН СССР, 1977.

Работа поступила в редколлегию 18 декабря 1978 года. Рекомендована кафедрой геодезии и фотограмметрии Свердловского горного института.