УДК 528.11+528.72

А. Л. ДОРОЖИНСКИЙ, М. Я. ГРИНЮК

УРАВНИВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОРРЕЛИРОВАННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Математическая обработка коррелированных результатов измерений становится в последнее время предметом пристального изучения с углублением теоретических аспектов этой проблемы [2—4].

В настоящей работе сделана попытка теоретически решить вопрос уравнивания функций зависимых результатов измерений.

Сформулируем задачу следующим образом: дан n-мерный вектор λ измеренных величин, свободный от систематических погрешностей, известна его корреляционная матрица R и весовая диагональная матрица P, получено t-функций

$$Y=F(\lambda) \tag{1}$$

этих величин, а их уравненные значения должны удовлетворять m условным уравнениям

$$\varphi(Y')=0 \quad (n>t>m). \tag{2}$$

Необходимо найти Y', исходя из принципа наибольшего веса.

Покажем прежде всего, что, как и в случае обработки некоррелированных измерений [1], уравнивание Y-функций приводит к тем же конечным результатам, что и уравнивание непосредственно измеренных коррелированных величин.

Обозначим поправки к Y-функциям через δ, так что

$$Y'=Y+\delta, \tag{3}$$

а поправки к измеренным величинам через v:

$$\lambda'=\lambda+v. \tag{4}$$

Линеаризация уравнений (3) дает

$$Y'=F(\lambda+v)=F(\lambda)+\frac{\partial F}{\partial \lambda}v=Y+\alpha v, \tag{5}$$

где $\alpha=\dfrac{\partial F_i}{\partial \lambda_i}$.

Сравнивая уравнения (3) и (5), находим, что

$$\delta=\alpha v. \tag{6}$$

Приводя к линейному виду условия (2), получаем

$$\varphi(Y')=\varphi(Y+\delta)=\varphi(Y)+\frac{\partial \varphi}{\partial Y}\delta=0.$$

Обозначая $W=\varphi(Y)$, $A=\frac{\partial\varphi_i}{\partial Y_i}$, записываем, что

$$A\delta+W=0, \tag{7}$$

или, с учетом (6),

$$A\alpha v+W=0. \tag{8}$$

От условных уравнений (8) перейдем к нормальным уравнениям коррелат [2]

$$A\alpha P^{-1/2}RP^{-1/2}\alpha^T Ak^T+W=0, \tag{9}$$

где k — вектор коррелат.

После решения системы (9) получим вектор v поправок к измеренным величинам

$$v=P^{-1/2}RP^{-1/2}\alpha^T A^T k, \tag{10}$$

а учитывая уравнение (6)

$$\delta=\alpha P^{-1/2}RP^{-1/2}\alpha^T A^T k. \tag{11}$$

Из уравнений (7) получим систему нормальных уравнений:

$$AQA^Tk+W=0. \tag{12}$$

Здесь Q — некоторая матрица, пока неопределенная.

Решение нормальных уравнений определяет вектор коррелат, а затем получаем поправки

$$\delta=QA^Tk. \tag{13}$$

Сравнивая формулы (9) и (12) или (11) и (13) приходим к выводу, что тождественные результаты уравнивания получим, если

$$Q=\alpha P^{-1/2}RP^{-1/2}\alpha^T. \tag{14}$$

Таким образом, если в уравнивание функций коррелированных измерений вводится матрица (14), то достигнутые результаты будут идентичными с уравниванием непосредственных измерений.

Уравнивание функций коррелированных результатов измерений можно выполнить иным путем, следуя теории обобщенного метода наименьших квадратов [2].

Переведем вектор λ с помощью линейного неособенного преобразования в вектор l равноточных и некоррелированных составляющих:

$$l=G\lambda, \quad (15) \qquad \text{где } G=(s^{-1})^T P^{-1/2}, \tag{16}$$

а матрица s получена путем разложения корреляционной матрицы R на две треугольных, так что

$$R=s^Ts. \tag{17}$$

Вектору l будет соответствовать вектор поправок

$$v_1 = Gv, \quad (18) \qquad \text{отсюда } v = G^{-1} v_1. \qquad (19)$$

Тогда условные уравнения (8) примут вид

$$A\alpha G^{-1} v_1 + W = 0. \qquad (20)$$

Минимизация квадратичной формы $v_1^T v_1 = \min$ приводит к нормальным уравнениям коррелат

$$N^T N k + W = 0, \qquad (21)$$

где

$$N^T = A\alpha G^{-1}; \quad (22) \qquad N = (G^{-1})^T \alpha^T A^T. \qquad (23)$$

Вектор

$$v_1 = Nk = (G^{-1})^T \alpha^T A^T k. \qquad (24)$$

С учетом уравнений (19), (24), (15), (16) найдем, что

$$v = G^{-1} (G^{-1})^T \alpha^T A^T k = P^{-1/2} R P^{-1/2} \alpha^T A^T k. \qquad (25)$$

Сравнивая формулы (10) и (25), убеждаемся в идентичности результатов. Очевидно, вектор δ по аналогии с (13) примет вид

$$\delta = \alpha P^{-1/2} R P^{-1/2} \alpha^T A^T k. \qquad (26)$$

Что же касается вопроса апостериорной оценки точности зависимых результатов измерений и их функций, то можно воспользоваться методикой, изложенной в монографии [2, гл. IV, § 22].

Для практической реализации задачи представляется целесообразным следующий алгоритм уравнивания функций зависимых результатов измерений:

1. Получение численных значений элементов матрицы α (частных производных α_{ij}).
2. Получение численных значений элементов матрицы A (частных производных A_{ij}).
3. Транспонирование матриц α и A.
4. Вычисление матрицы Q по формуле (14).
5. Вычисление матрицы-столбца свободных членов $W = \varphi(Y)$.
6. Составление системы нормальных уравнений коррелат (12) и последующее ее решение.
7. Вычисление уравненных значений функций на основании уравнений (13) и (3).
8. Апостериорная оценка точности функций Y'.
9. При необходимости, вычисление вектора уравненных результатов измерений λ' и его апостериорная оценка точности.

Наконец, рассмотрим частные случаи математической обработки различных измеренных величин λ.

В случае обработки неравноточных некоррелированных измерений $R = E$ и матрица Q (14) приобретает вид

$$Q = \alpha P^{-1} \alpha^T, \qquad (27)$$

что приводит к методике, изложенной в работе [1].

В случае обработки равноточных коррелированных измерений $P=E$ и матрица Q (14) принимает вид

$$Q=\alpha R\alpha^T, \tag{28}$$

а обработка ведется по описанному выше алгоритму.

В случае некоррелированных равноточных измерений $R=E$ и $P=E$; тогда Q преобразуется:

$$Q=\alpha\alpha^T. \tag{29}$$

В заключение отметим, что описанный алгоритм может быть использован при практической реализации геодезических и фотограмметрических задач, в первую очередь таких, как маршрутная и блочная фототриангуляция.

Список литературы: 1. *Большаков В. Д., Гайдаев П. А.* Теория математической обработки геодезических измерений. — М.: Недра, 1977. 2. *Кемниц Ю. В.* Математическая обработка зависимых результатов измерений. — М.: Недра, 1970. 3. *Маркузе Ю. И.* Совместная обработка результатов многократных коррелированных измерений нескольких величин. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1977, № 5. 4. *Moritz H.* A generalized least—squares model. — Studia geoph. et geod., 1970, 14.

Работа поступила в редколлегию 18 декабря 1978 года. Рекомендована кафедрой аэрофотогеодезии Львовского политехнического института.