

С. Г. МОГИЛЬНЫЙ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ УРАВНИВАНИИ ФОТОТРИАНГУЛЯЦИИ ПО СВЯЗКАМ

В работе [3] было показано, что целесообразность определения в процессе уравнивания параметров систематических погрешностей при обработке измерений конкретного вида требует исследований и обоснования. Цель настоящей статьи — применение для анализа эффективности самокалибровки при уравнивании фототриангуляции, построенной по связкам, методики, изложенной в работе [3].

При параметрическом способе уравнивания фототриангуляции с самокалибровкой, согласно работе [1], параметрическое уравнение связи имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x &= f \frac{a_1(X-X_s) + a_2(Y-Y_s) + a_3(Z-Z_s)}{c_1(X-X_s) + c_2(Y-Y_s) + c_3(Z-Z_s)} + \varphi_x(x, y, \theta_1, \dots, \theta_r); \\ y &= f \frac{b_1(X-X_s) + b_2(Y-Y_s) + b_3(Z-Z_s)}{c_1(X-X_s) + c_2(Y-Y_s) + c_3(Z-Z_s)} + \varphi_y(x, y, \theta_1, \dots, \theta_r), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где x, y — координаты изображения точки на снимке в системе фотокамеры с началом в главной точке снимка; X, Y, Z и X_s, Y_s, Z_s — геодезические координаты точки местности и точки фотографирования; a_i, b_i, c_i — направляющие косинусы ориентирования системы координат фотокамеры; φ_x, φ_y — систематические погрешности координат x и y , являющиеся функциями параметров систематических погрешностей Θ_i и положения изображения на снимке.

Линеаризуя уравнение связи (1) для случая измерений, содержащих случайные погрешности, получаем параметрические уравнения поправок

$$AX + B\omega + D\Theta + L = V, \quad (2)$$

где X — вектор-столбец поправок в приближенные геодезические координаты точек местности; ω — вектор-столбец поправок в элементы внешнего ориентирования снимков; Θ — вектор-столбец размерности r поправок в параметры систематических погрешностей; L — вектор-столбец свободных членов; V — вектор-столбец поправок в измеренные координаты изображений точек местности на снимках; A, B, D — матрицы коэффициентов при соответствующих поправках, вычисляемые при линеаризации параметрических уравнений связи (1).

Не нарушая общности, можно предполагать, что векторы параметров систематических погрешностей и поправок к его составляющим совпадают, т. е. приближенное значение параметров равно нулю, поэтому они будут обозначаться в дальнейшем через Θ .

Решение системы (2) выполняется по методу наименьших квадратов при условии

$$V^T P_v V = \min, \quad (3)$$

где P_v — матрица весов измеренных координат x, y .

Условие (3) можно представить и в более общем виде, когда фототриангуляция строится с использованием дополнительных данных. Это не приведет к изменению результатов, но существенно загромоздит изложение.

Системе (2) при выполнении условия (3) соответствуют следующие нормальные уравнения:

$$\begin{vmatrix} N_x; & N_{x\omega}; & N_{x\theta}; \\ N_{x\omega}^T; & N_\omega; & N_{\omega\theta}; \\ N_{x\theta}^T; & N_\theta^T; & N_\theta; \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X \\ \omega \\ \theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_x \\ L_\omega \\ L_\theta \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

где

$N_x = A^T P_v A;$	$N_{x\omega} = A^T P_v B;$	$N_{x\theta} = A^T P_v D;$
$N_\omega = B^T P_v B;$	$N_{\omega\theta} = B^T P_v D;$	$N_\theta = D^T P_v D;$
$L_x = A^T P_v L;$	$L_\omega = B^T P_v L;$	$L_\theta = D^T P_v L.$

Однако система уравнений (4) часто может не иметь решения вследствие особенности матрицы коэффициентов или из-за ее сильной обусловленности. Указанные трудности вызваны двумя причинами, разделить которые практически невозможно.

Первая причина заключается в том, что решение системы (4) выполняется на ЭВМ с ограниченным числом значащих цифр. Так как система очень большая, то погрешности округлений накапливаются и искажают результаты.

Вторая причина состоит в том, что в конкретной сети фототриангуляции недостаточно избыточных измерений, чтобы можно было определить все составляющие вектора Θ . При этом здесь главным является не только число избыточных измерений, но и их размещение по сети. Из геометрических соображений выяснить этот вопрос очень трудно. Поэтому матрица коэффициентов (4) может оказаться особенной, т. е. ее определитель

будет равен нулю, а система — однозначно неразрешимой. В то же время первая из указанных причин может завуалировать вторую. Накопившись, погрешности округлений искажат действительное значение определителя системы и сделают его отличным от нуля. Будет получено решение, но достаточно незначительно изменить коэффициенты системы либо увеличить число значащих цифр при вычислениях и результат решения будет совершенно другим, причем неизвестно, какой из них правильный. Поэтому прежде чем решать систему (4) необходимо определить, достаточно ли в данной сети избыточных измерений для определения параметров систематических погрешностей.

Из геометрических соображений всегда точно известно, что без вектора Θ система (4) разрешима, поэтому, исключая по правилам многогруппового уравнивания [2] векторы X и ω , всегда можно получить

$$N_\Theta \Theta + L_\Theta = 0, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} N_\Theta = N_\Theta - N_{x\Theta}^T N_x^{-1} N_{x\Theta} - (N_{\omega\Theta}^T - N_{x\Theta}^T N_x^{-1} N_{x\omega}) \times \\ \times (N_\omega - N_{x\omega}^T N_x^{-1} N_{x\omega})^{-1} (N_{\omega\Theta} - Y N_{x\omega}^T N_x^{-1} N_{x\Theta}). \end{aligned}$$

Если матрица N_Θ имеет обратную, т. е. она неособенная и не сильно обусловлена, то система (4) разрешима. Поскольку матрица N_Θ обязательно искажена погрешностями округления, то здесь также встречаемся с отмеченными выше трудностями. В этих условиях анализ может быть проведен различными способами, один из которых, рассмотренный далее, заключается в следующем:

1. По правилам алгоритма Гаусса матрица N_Θ приводится к треугольному виду. Если в процессе преобразования очередной диагональный элемент становится меньше допуска ε_0 , то это обозначает, что компонента Θ_i вектора Θ , соответствующая этому диагональному элементу, в данной сети не определяется. В матрице N_Θ все коэффициенты перед Θ_i , кроме диагонального, заменяются нулями, а на главной диагонали — единицей. Приведение к треугольному виду продолжается, но уже без учета Θ_i . Таким образом, из матрицы N_Θ исключаются строки и столбцы, линейно-зависимые от остальных.

2. Матрица N_Θ , полученная выше, обращается обычным образом. Диагональные элементы q_{jj} ее являются величинами, обратными весам параметров систематических погрешностей, которые можно определить в данной сети. Дисперсия $m_{\Theta_j}^2$ параметра Θ_j

$$m_{\Theta_j}^2 = \mu^2 q_{jj}, \quad (6)$$

где μ^2 — дисперсия единицы веса.

Если значение $m_{\Theta_j}^2$ велико, то использование параметра Θ_j приведет к значительному увеличению влияния случайных погрешностей на результаты уравнивания сети, причем искажения

могут быть большими, чем если бы этот параметр не учитывался. Поэтому здесь естественно поставить условие, чтобы

$$m_{\Theta_j}^2 \leq \varepsilon_j, \quad (7)$$

где ε_j — некоторый допуск.

Если условие (7) не выполняется для какого-либо параметра, то выбирается Θ_k , для которого условие (7) не выполняется наименее сильно, параметр Θ_k из матрицы N_Θ исключается, как описано выше. Вновь полученная матрица N_Θ обращается и проверяется выполнение условий (7). Так продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие (7) для всех Θ_j . В полученной обратной матрице диагональные элементы, соответствующие исключенным параметрам, заменяются нулями. Вычисленную указанным способом обратную матрицу будем называть N_Θ^{-1} — обратной матрицей матрицы N_Θ в смысле условия (7). Тогда неизвестные системы (4) будут вычисляться по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= -N_\Theta^{-1} L_\theta; \\ \omega &= -(N_\omega - N_{x\omega}^T N_x^{-1} N_{x\omega})^{-1} [L_\omega + (N_{\omega\theta} - N_{x\theta}^T N_x^{-1} N_{x\theta}) \theta]; \\ X &= -N_x^{-1} (N_{x\omega} \omega + N_{x\theta} \theta + L_x), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{L}_\omega &= L_\omega - N_{x\omega} N_x^{-1} L_x; \\ \bar{L}_\theta &= L_\theta - N_{x\theta}^T N_x^{-1} L_x - (N_{\omega\theta}^T - N_{x\theta}^T N_x^{-1} N_{x\omega}) \times \\ &\quad \times (N_\omega - N_{x\omega}^T N_x^{-1} N_{x\omega})^{-1} \bar{L}_\omega. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Как следует из алгоритма вычисления матрицы N_Q^{-1} , все исключенные параметры Θ_i , вычисленные по формуле (8), будут равны нулю. Следовательно, вместо вектора Θ будет вычислен некоторый вектор $\bar{\Theta}$, который только аппроксимирует вектор Θ . Близость этих векторов следует оценивать по их влиянию на погрешности уравненных координат точек местности.

Таким образом, при уравнивании конкретной сети фототриангуляции возможны два пути вычислений:

1. Система (4) решается без учета вектора Θ , т. е. без исключения систематических погрешностей.

2. При решении системы (4) определяется вектор $\bar{\Theta}$, который компенсирует некоторую часть систематических погрешностей.

Какой из результатов уравнивания предпочтительнее можно оценить, как показано в работе [3], по вероятности события $|\delta| \leq |\bar{\delta}|$, где δ — истинная погрешность результата уравнивания без учета систематических погрешностей; $\bar{\delta}$ — истинная погрешность той же величины при уравнивании с определением вектора $\bar{\Theta}$.

Для оценки этой вероятности при сравнении погрешностей координат точек местности перепишем систему (4), исключая поправки в геодезические координаты всех точек местности, кроме одной i -й, которой соответствуют матрицы C_x , $C_{x\theta}$, $C_{x\omega}$ в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} \bar{N}_\omega; & \bar{N}_{\omega\theta}; & C_{x\omega}; \\ \bar{N}_{\omega\theta}^T; & \bar{N}_\theta; & C_{x\theta}; \\ C_{x\theta}^T; & C_x^T; & C_x; \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega \\ \theta \\ X_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{L}_\omega \\ \bar{L}_\theta \\ L_x \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

При первом пути решения системы (10) вектор погрешностей Δ_i координат точки i будет иметь ковариационную матрицу $K(\Delta_i)$, определяемую соотношением

$$K(\Delta_i) = \mu^2 (C_x - C_{x\omega}^T \bar{N}_\omega^{-1} C_{x\omega})_{x\omega}^{-1}, \quad (11)$$

и математическое ожидание $MO(\Delta_i)$ —

$$MO(\Delta_i) = (C_x - C_{x\omega}^T \bar{N}_\omega^{-1} C_{x\omega})^{-1} (C_{x\theta} - \bar{N}_\omega^{-1} \bar{N}_{\omega\theta}) \theta. \quad (12)$$

Решая систему (10) с определением вектора $\bar{\Theta}$, вектор погрешностей $\bar{\Delta}_i$ координат точки i получаем со статистическими показателями, вычисляемыми по формулам:

$$K(\bar{\Delta}_i) = \mu^2 [C_x - C_{x\omega}^T \bar{N}_\omega^{-1} C_{x\omega} - (C_{x\theta}^T - C_{x\omega}^T \bar{N}_\omega^{-1}) \times \\ \times N_\theta^{-1} (C_{x\theta} - \bar{N}_\omega^{-1} C_{x\omega})]^{-1}, \quad (13)$$

$$и \quad MO(\bar{\Delta}_i) = - [C_x - C_{x\omega}^T \bar{N}_\omega^{-1} C_{x\omega} - (C_{x\theta}^T - C_{x\omega}^T \bar{N}_\omega^{-1}) \times \\ \times \bar{N}_\theta^{-1} (C_{x\theta} - \bar{N}_\omega^{-1} C_{x\omega})]^{-1} [C_{x\theta}^T - C_{x\omega}^T \bar{N}_\omega^{-1} \bar{N}_{\omega\theta} - \\ - (C_{x\theta}^T - C_{x\omega}^T \bar{N}_\omega^{-1} \bar{N}_{\omega\theta}) \bar{N}_\theta^{-1} (\bar{N}_\theta - \bar{N}_{\omega\theta}^T \bar{N}_\omega^{-1} \bar{N}_{\omega\theta})] \theta. \quad (14)$$

Если информации в измерениях достаточно для точного определения всех компонент вектора Θ , то легко показать, что правая часть формулы (14) будет тождественно равна нулю. В других случаях $MO(\bar{\Delta}_i)$ в общем случае отлична от нуля и не обязательно меньше значений $MO(\Delta_i)$ из формулы (12).

Сравнение векторов Δ_i и $\bar{\Delta}_i$ громоздко и не наглядно, поэтому рассмотрим погрешности одной координаты Z , на примере которой поясним методику анализа. Погрешность δ_{zi} координаты Z_i точки i при уравнении без определения вектора Θ характеризуется дисперсией $\sigma_{z_i}^2$, равной диагональному элементу матрицы $K(\Delta_i)$, и математическим ожиданием $a_z = t_z \Theta$, где t_z — строка матрицы в формуле (12), соответствующая координате Z .

При уравнивании с исключением систематических погрешностей координата Z_i имеет погрешность $\bar{\delta}_{z_i}$ характеризующуюся дисперсией $\sigma_{z_i}^2$, диагональным элементом матрицы $K(\bar{\Delta}_i)$ и математическим ожиданием

$$\bar{a}_z = \bar{t}_z \theta, \quad (15)$$

где \bar{t}_z — строка матрицы перед вектором Θ в формуле (14).

Следует отметить, что σ_{z_i} всегда меньше $\bar{\sigma}_{z_i}$.

Как показано в работе [3], сравнение погрешностей δ_{z_i} и $\bar{\delta}_{z_i}$ следует выполнять по вероятности события $P(|\bar{\delta}_{z_i}| \leqslant |\delta_{z_i}|)$, которая в данном случае может быть вычислена по формуле

$$\gamma = P(|\bar{\delta}_{z_i}| \leqslant |\delta_{z_i}|) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma^2 - 1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\delta}^{\delta} \exp \left\{ \left| \delta - a; \bar{\delta} - \bar{a} \right| \times \right. \\ \left. \times \begin{vmatrix} 1; & 1; \\ 1; & \sigma^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{\delta} - a \\ \bar{\delta} - \bar{a} \end{vmatrix} \right\} d\bar{\delta} \cdot d\delta, \quad (16)$$

где

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}_{z_i}}{\sigma_{z_i}}; \quad (17) \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{\sigma_{z_i}} |t_{z_i}| \cdot d \cdot \cos \varphi; \\ \bar{a} &= \frac{1}{\sigma_{z_i}} |\bar{t}_{z_i}| d \cos (\psi - \varphi); \end{aligned} \quad (18)$$

$|t_z|$, $|\bar{t}_z|$ — модули векторов t_z и \bar{t}_z ; d — модуль вектора Θ ; φ, ψ — углы между векторами соответственно t_z и Θ , t_z и \bar{t}_z .

При фиксированном $\bar{\sigma}$ значение вероятности γ зависит от соотношения величин a и \bar{a} , т. е. от положения точки с координатами (a, \bar{a}) на плоскости с осями a и \bar{a} (рис. 1). Кривые G и G' на рисунке соответствуют значению γ , равному 0,5 при фиксированном σ .

Численный анализ уравнения кривых G и G' показал, что оно с достаточной точностью выражается соотношением

$$a^2 - \bar{a}^2 = 0,75 (\bar{\sigma}^2 - 1). \quad (19)$$

Если соотношение a и \bar{a} таково, что точка (a, \bar{a}) попадает между линиями G и G' , то вероятность γ меньше 0,5 и, следовательно, включение вектора Θ в уравнивание приведет чаще к увеличению погрешности координаты.

Формулы (18) представляют собой уравнение эллипса, в пределах которого при некотором d может находиться точка (a, \bar{a}) . Если в (18) подставить наибольшее значение d для данных условий, то эллипс оконтурил возможные соотношения a и \bar{a} . Отношение сторон прямоугольника, в которой вписан

эллипс (18), выражает степень уменьшения возможной наибольшей систематической погрешности результата уравнивания при определении вектора Θ по сравнению с уравниванием без исключения систематических погрешностей. Это отношение k на основании (18) определяется формулой

$$k = \frac{|\bar{t}_z|}{|t_z|}. \quad (20)$$

Если эллипс (18) находится полностью между линиями G и G' , то включение в уравнение вектора Θ не улучшает результатов уравнивания, поскольку приводит к существенному

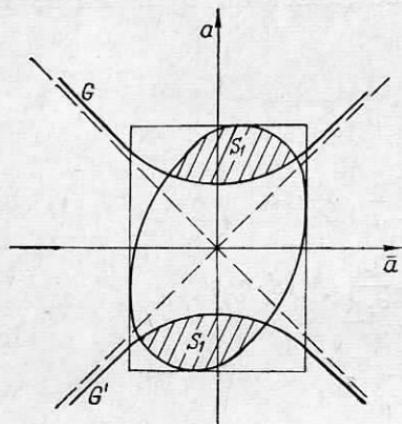


Рис. 1. Расположение возможных значений систематических погрешностей результатов уравнивания.

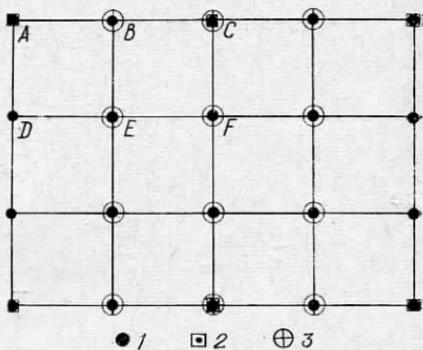


Рис. 2. Схема сети аналитической фототриангуляции:
1 — точка сгущения; 2 — опорная точка; 3 — центр фотографирования.

увеличению влияния случайных погрешностей. Поэтому вторым показателем эффективности исключения систематических погрешностей в процессе уравнивания может служить отношение ξ заштрихованной площади S_1 к площади всего эллипса S :

$$\xi = S_1/S. \quad (21)$$

Чем больше d , т. е. чем больше систематические погрешности при прочих равных условиях, тем эффективнее борьба с ними в процессе уравнивания.

Величину ξ можно интерпретировать как частоту события, что включение вектора Θ в уравнение приведет к уменьшению погрешности результата.

Исходя из полученных выше показателей, было выполнено проектирование и реализация алгоритма уравнивания аналитической фототриангуляции для сгущения съемочного обоснования на открытых горных работах. Функции φ_x и φ_y в (1) рассматривали в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_x &= \theta_1 + \theta_2 x + \theta_3 y + \theta_4 x^2 + \theta_5 y^2 + \theta_6 xy + \theta_7 x^2 y + \\ &\quad + \theta_8 xy^2 + \theta_9 x^3 + \theta_{10} y^3; \\ \Phi_y &= \theta_{11} + \theta_{12} x + \theta_{13} y + \theta_{14} x^2 + \theta_{15} y^2 + \theta_{16} xy + \theta_{17} x^2 y + \\ &\quad + \theta_{18} xy^2 + \theta_{19} x^3 + \theta_{20} y^3. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Формулы (22) следует рассматривать как аппроксимирующие некоторую неизвестную закономерность изменения систематических погрешностей, не придавая параметрам Θ_i физического смысла. Вектор $\bar{\Theta}$ принимают постоянным для всех снимков уравниваемой сети. Для применяемых АФА правомерно предполагать, что наибольшего значения систематические погрешности достигают на краю снимков. Тогда величина d оценивается по соотношению

$$d \geq \frac{\eta}{\sqrt{1 + x_{\max} + y_{\max} + \dots + y_{\max}^3}}, \quad (23)$$

где η — возможное наибольшее значение систематической погрешности координат изображения; x_{\max}, y_{\max} — наибольшие координаты изображений на снимке.

Исследование блоков фототриангуляции было произведено с помощью комплекса программ для ЭВМ М-222, транслятора ТА-2м, позволяющего выполнить вычисления по формулам (11)–(14) и (20), (21) для сетей, состоящих не более чем из 30 снимков. Исследовались макеты блоков фототриангуляции съемки плоской местности, а также блоки из реальных снимков открытых горных работ. Прежде всего было определено, что информации в измерениях блоков совершенно недостаточно для получения Θ_1 и Θ_{11} . Эти параметры отбрасываются на первом этапе обращения матрицы N_Θ даже при ε_0 , равном 10^{-9} . Остальные параметры целесообразно вычислять, если ε_j в условии (7) устанавливают на основании требования, в соответствии с которым стандарт погрешности вычисления Φ_x или Φ_y из-за погрешности Θ_j не должен превышать на краю снимка μ стандарта случайной погрешности измерения координат изображения. В этом случае при значении η в пределах двух-трех величин μ практически всегда целесообразно выполнять уравнивание с учетом вектора $\bar{\Theta}$. В таблице приведены данные анализа для одного блока (рис. 2). Как видим, определение вектора $\bar{\Theta}$ почти всегда позволяет исключить систематические погрешности из результатов уравнивания, в то же время влияние случайных погрешностей увеличивается незначительно: при η , равном 2–3 μ отношение ξ существенно больше 0,5, а σ в среднем не превышает 1,1.

В сети фототриангуляции (рис. 2) точка местности должна быть изображена и измерена на всех снимках, где ее коорди-

наты не превышают по абсолютной величине 70 мм. Значения стандарта σ приведены в таблице в микронах в масштабе снимка, равного для $\mu \pm 10$ мкм при фокусном расстоянии камеры 100 мм. После анализа матрицы N_θ оказалось, что при поставленном выше условии задания допуска ε_j в данной сети

Показатели эффективности исключения систематических погрешностей в процессе уравнивания

№ точек	Название коорди- ната	σ	$\bar{\sigma}$	α при $\eta = \mu$	k	Значения ξ при различных η			
						μ	2μ	3μ	4μ
A	X	13,0	1,03	0,35	0	0,60	0,90	0,96	0,97
	Y	19,7	1,05	0,43	0	0,60	0,90	0,96	0,97
	Z	25,5	1,04	0,34	0	0,44	0,86	0,94	0,97
B	X	8,2	1,07	0,46	0	0,48	0,87	0,94	0,97
	Y	8,2	1,12	0,69	0	0,60	0,90	0,96	0,97
	Z	14,1	1,06	0,33	0	0,15	0,79	0,91	0,95
C	X	6,2	1,02	0,30	0	0,64	0,91	0,96	0,98
	Y	5,4	1,04	0,49	0	0,74	0,94	0,97	0,98
	Z	8,4	1,01	0,10	0	0,23	0,81	0,91	0,95
D	X	8,6	1,11	0,93	0	0,80	0,95	0,98	0,99
	Y	14,2	1,21	1,02	0	0,65	0,91	0,96	0,98
	Z	21,0	1,09	0,66	0,41	0,28	0,57	0,67	0,71
E	X	6,2	1,05	0,48	0	0,77	0,94	0,97	0,99
	Y	7,4	1,16	0,86	0	0,64	0,91	0,96	0,98
	Z	14,4	1,02	0,48	0,78	0,38	0,55	0,60	0,62
F	X	5,2	1,01	0,14	0	0,53	0,88	0,95	0,97
	Y	5,6	1,02	0,26	0	0,42	0,86	0,94	0,96
	Z	11,6	1,00	0,44	0,04	0,38	0,41	0,43	0,44

систематические погрешности можно аппроксимировать следующими функциями:

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \theta_{2x} + \theta_3 y + \theta_4 x^2 + \theta_5 y^2 + \theta_6 xy + \theta_7 x^2 y + \theta_8 xy^2; \\ \varphi_y &= \theta_{14} x^2 + \theta_{18} xy. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (24)$$

В литературе имеются предложения о включении параметров Θ_i в уравнивание в качестве измеренных величин с некоторыми весами и результатами измерения, равными нулю. Вычисления, выполненные для сетей фототриангуляции, показали, что при таком определении вектора $\bar{\Theta}$ принятые выше показатели степени исключения систематических погрешностей только ухудшаются. Кроме того, влияние отдельных параметров Θ_i на погрешность результатов сильно возрастает. Поэтому для урав-

нивания сетей фототриангуляции включать Θ_i в уравнивание как измеренные величины не рекомендуется.

Изменение числа и размещения опорных и определяемых точек меняет число слагаемых в формулах (26). Дальнейшее изучение закономерностей появления систематических погрешностей, уточнение формул (24) позволит полнее исключать систематические погрешности в сетях фототриангуляции. Однако уже применение формул (24) при уравнивании сетей из реальных снимков дает существенное повышение точности результатов. Для ЭВМ М-222 на кафедре геодезии Донецкого политехнического института автором совместно с инженером Ю. Ф. Кругликовым разработан комплекс программ уравнивания сетей фототриангуляции по связкам с исключением систематических погрешностей по описанной выше методике. Приведем для примера результаты уравнивания двух сетей фототриангуляции по снимкам открытых горных работ с 60%-ным продольным и поперечным перекрытием масштаба 1 : 9000 с фокусным расстоянием 98,52 мм, камерой АФА-ТЭ-100 с самолета АН-2. Первая сеть включала 10 снимков и 125 маркированных на местности точек с известными координатами, вторая состояла из 12 снимков и 159 маркированных точек. По результатам уравнивания измерений снимков на стекометре получено значение μ , равное $\pm 6 \dots 8$ мкм. Среднее квадратическое отклонение вычисленных геодезических координат от заданных, определенных наземными методами в зоне межмаршрутного перекрытия, не превысило 0,1 м. При уравнивании в качестве опорных использовались 10 маркированных точек, равномерно распределенных по сети. Уравнивание этих же сетей без исключения систематических погрешностей увеличивает среднее квадратическое отклонение вычисленных координат от заданных в 1,5—2 раза.

Таким образом, включение любых параметров систематических погрешностей в уравнивание требует анализа по приведенной выше методике как возможности, так и эффективности их определения.

Использование аппроксимирующих функций систематических погрешностей, например вида (22), позволяет добиться существенного повышения точности результатов уравнивания сетей аналитической фототриангуляции.

Список литературы: 1. Дубиновский Б. В. Построение фотограмметрических сетей с одновременным определением и исключением систематических ошибок координат точек снимков. — Геодезия и картография, 1971, № 9. 2. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. — М.: Физматгиз, 1962. 3. Могильный С. Г. Выбор способа уравнивания измерений, содержащих систематические ошибки. — Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1977, № 1.

Работа поступила в редакцию 22 мая 1978 года. Рекомендована кафедрой геодезии Донецкого политехнического института.