

В. В. КОТОВ

СГУЩЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ОСНОВЫ МЕТОДОМ МНОГОКРАТНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ УГЛОВЫХ ЗАСЕЧЕК

Реконструкция городов потребует в ближайшее время значительного увеличения объемов, повышения точности и оперативности геодезических работ на застроенных территориях. Следует ожидать также, что с увеличением плотности застройки, усложнением сети подземных сооружений и коммуникаций, возрастанием интенсивности уличного движения условия для проведения геодезических измерений будут ухудшаться.

Одной из наиболее сложных проблем, возникающих при этом, является обеспечение городов стабильной геодезической основой. В настоящее время, например, на территориях промышленных предприятий до 30% грунтовых полигонометрических знаков уничтожается в течение 4—5 лет [3]. В результате обследования, проведенного в 1972 г. в Йошкар-Оле, установлено, что за период 1967—1972 гг. в застроенной части города было уничтожено свыше 30% грунтовых знаков. Аналогичное положение создалось и в других местах [4, 6]. Вследствие этого в застроенной части большинства городов опорных пунктов недостаточно, что усложняет проведение геодезических работ и требует повторного построения опорных сетей. К тому же грунтовые знаки нередко расположены в неудобных для наблюдения местах. Недостатки их заключаются и в том, что они неэкономичны, их очень трудно эксплуатировать в зимнее время, необходимо согласовывать места их закладки, они выпучиваются в процессе замерзания и оттаивания грунта. Поэтому на городских территориях целесообразно создавать постоянные пространственные планово-высотные сети из пунктов настенной полигонометрии и пунктов, расположенных на высоких сооружениях, таких, как телевышки, радиомачты, высот-

ные и многоэтажные здания, заводские трубы, колокольни церквей, водонапорные башни, опоры линий электропередач и т. п.

Наличие достаточно густой пространственной геодезической сети позволит в любое время года оперативно и с минимальными затратами труда путем обратных пространственных угловых засечек определять планово-высотное положение дополнительных опорных точек, необходимых для обеспечения съемочных и разбивочных работ, практически в любой части застроенных территорий и их окрестностей. Пространственные засечки могут также широко применяться при геодезических работах в горной и предгорной местности, а также в карьерах.

Как известно, многократные засечки по горизонтальным углам являются достаточно надежным способом определения планового положения точек. При коротких расстояниях для определения планово-высотного положения точек могут применяться также засечки по вертикальным углам [5]. Основной их недостаток состоит в том, что с определяемой точки должна быть видимость на большое число опорных пунктов, что не всегда возможно.

Однако если планово-высотное положение точки определять путем многократной пространственной засечки совместным уравниванием измеренных горизонтальных и вертикальных углов, то число исходных опорных пунктов можно уменьшить. В частности, однократная обратная пространственная угловая засечка возможна при наличии всего лишь двух опорных пунктов [2], в то время как для плоской однократной обратной угловой засечки требуется три пункта.

Уравненные значения искомых величин для любой точки, определяемой многократной пространственной угловой засечкой, можно представить в виде:

$$x = x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y, \quad H = H_0 + \delta H, \quad q = q_0 + \delta q. \quad (1)$$

где x , y — координаты и H — высота точки; q — показатель совместного влияния кривизны Земли и рефракции; x_0 , y_0 , H_0 , q_0 — приближенные значения искомых величин; δx , δy , δH , δq — поправки к приближенным значениям, получаемые из уравнивания.

Приближенные значения координат и высоты определяемой точки можно получить из решения однократной плоской или пространственной засечки. Для этой цели используют также способ Болотова. В качестве приближенного значения коэффициента q можно принять

$$q_0 = \frac{1 - 0,14}{2R} = 6,7 \cdot 10^{-9}.$$

Пусть точки 1, 2, 3, ... (рис. 1) являются исходными, а P — определяемой. Тогда зависимость между измеренными и опреде-

ляемыми величинами для случая обратной многократной пространственной угловой засечки можно представить равенствами

$$\left. \begin{aligned} \beta_i &= a_{i+1} - a_i = \operatorname{arctg} \frac{y_{i+1} - y}{x_{i+1} - x} - \operatorname{arctg} \frac{y_i - y}{x_i - x}; \\ v_i &= \operatorname{arctg} \frac{H_i - H - i - f_i}{S_i} = \operatorname{arctg} \frac{H_i - H - i - f_i}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где β_i — горизонтальные углы при определяемой точке; x_i, y_i, H_i — координаты и отметки визирных целей на опорных пунктах; v_i, a_i — углы наклона и дирекционные углы направлений на эти пункты; i — высота инструмента; f_i — суммарные поправки за кривизну Земли и рефракцию; S_i — расстояния до опорных пунктов. Индексы в приведенных обозначениях соответствуют номерам наблюдаемых опорных пунктов.

Дифференцируя равенства (2) по искомым переменным, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \beta_i}{\partial x} &= \frac{\rho}{S_{i+1}} \sin a_{i+1} - \frac{\rho}{S_i} \sin a_i = A_{i+1} - A_i = a_{\beta_i}; \\ \frac{\partial \beta_i}{\partial y} &= -\frac{\rho}{S_{i+1}} \cos a_{i+1} + \frac{\rho}{S_i} \cos a_i = -B_{i+1} + B_i = b_{\beta_i}; \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} &= \frac{\rho}{S_i} \cos a_i \operatorname{tg} v_i \cos^2 v_i \approx B_i \operatorname{tg} v_i = a_{v_i}; \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} &= \frac{\rho}{S_i} \sin a_i \operatorname{tg} v_i \cos^2 v_i \approx A_i \operatorname{tg} v_i = b_{v_i}; \\ \frac{\partial v_i}{\partial H} &= -\frac{\rho}{S_i} \cos^2 v_i \approx -\frac{\rho}{S_i} = c_{v_i}; \\ \frac{\partial v_i}{\partial q} &= -\rho S_i \cos^2 v_i \approx -\rho S_i = d_{v_i}. \end{aligned} \right\} \quad (3)*$$

В соответствии с обозначениями, принятыми в (3), уравнения ошибок можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} a_{v_i} \delta x + b_{v_i} \delta y + c_{v_i} \delta H + d_{v_i} \delta q + l_{v_i} &= v_{v_i}; \\ a_{\beta_i} \delta x + b_{\beta_i} \delta y &+ l_{\beta_i} = v_{\beta_i}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

* В равенствах (3) и (10) S_i следует выражать в дециметрах, ρ — в секундах, а значения $\cos v$ при $v > 10^\circ$ — брать из таблиц.

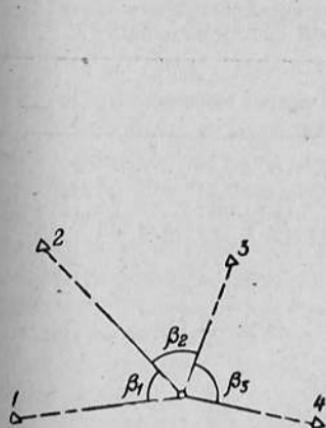


Рис. 1. Схема обратной многократной засечки.

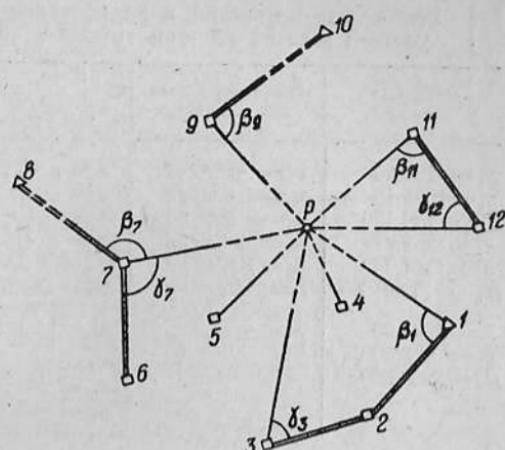


Рис. 2. Схема прямой многократной засечки.

где

$$\left. \begin{aligned} l_{\beta_i} &= \left(\arctg \frac{y_{i+1}-y_0}{x_{i+1}-x_0} - \arctg \frac{y_i-y_0}{x_i-x_0} \right) - \beta_i = \\ &= (a_{0,i+1} - a_{0,i}) - \beta_i; \\ l_{v_i} &= \arctg \frac{H_i - H_0 - i - f_{0,i}}{S_{0,i}} - v_i = v_{0,i} - v_i. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Число уравнений ошибок равно общему числу измеренных углов β и v . Необходимые для вычисления свободных членов предварительные расстояния S_0 и дирекционные углы a_0 находим из решения обратных геодезических задач, а величины f_0 определяем по формуле

$$f_{0,i} = q_0 S_{0,i}^2. \quad (6)$$

Решая далее уравнения (4) при условии $[pv^2] = \min$, получим четыре нормальных уравнения, из которых и найдем вероятнейшие значения поправок δx , δy , δH и δq .

Оценку точности результатов можно произвести по формуле

$$m_i = m \sqrt{Q_{ii}}, \quad (7)$$

где m — средняя квадратическая ошибка измеренных углов; Q_{ii} — квадратичные весовые коэффициенты.

Значение m находим по колебаниям коллимационной ошибки и места нуля в измерениях на определяемом пункте.

Результаты измерений и уравнивания обратной пространственной угловой засечки по трем точкам в условной системе координат

Исходные данные	Результаты полевых измерений	Уравненные величины
$x_1 = 234,20$	$v_1 = 2^{\circ}10'41''$	$x = x_0 + \delta x = 2003,00 + 0,24$
$y_1 = 1955,15$	$v_2 = 3^{\circ}40'19''$	$y = y_0 + \delta y = 1985,00 + 0,23$
$H_1 = 139,126$	$v_3 = 4^{\circ}55'20''$	$H = H_0 + \delta H = 70,00 + 0,11$
$x_2 = 1258,47$	$\beta_1 = 38^{\circ}49'28''$	$q = q_0 + \delta q = 6,7 \cdot 10^{-9} - 1,7 \cdot 10^{-9}$
$y_2 = 1364,74$	$\beta_2 = 105^{\circ}42'52''$	$m_x = \pm 2,6 \text{ см}$
$H_2 = 133,959$	$i = 1,592$	$m_y = \pm 1,8 \text{ см}$
$x_3 = 3885,09$	$m = \pm 3'',2$	$M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = \pm 3,2 \text{ см}$
$y_3 = 629,50$		$m_H = \pm 1,9 \text{ см}$
$H_3 = 268,600$		$m_q = \pm 0,79 \cdot 10^{-9}$
		$m' = \pm 3,1''$

В таблице даны результаты измерений и уравнивания обратной пространственной угловой засечки по трем опорным пунктам. Измерения выполнены в натуре 12 сентября 1972 г. теодолитом $Th=40$ двумя приемами с 16 до 18 ч.

Как видим, при многократной пространственной угловой засечке x , y и H находим с точностью одного порядка, удовлетворяющей требованиям крупномасштабных съемок.

С помощью инверсионного треугольника ошибка M положения определяемой точки была подсчитана также для случая определения x и y из обратной засечки только по горизонтальным углам β_1 и β_2 . В этом случае M равно $\pm 3,3$ см. Таким образом, увеличение точности определения координат в случае обратной пространственной засечки по трем опорным точкам, по сравнению с обычной однократной обратной засечкой, при небольших углах наклона оказалось незначительным, всего на 4 %. Однако и в этом случае пространственная засечка имеет смысл, так как обеспечивает контроль определяемых величин. Например, наличие грубых ошибок в исходных данных или в измеренных углах сразу же сказалось бы на поправках v . Поэтому резкое отклонение значения m' , вычисленного по формуле

$$m' = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-4}}, \quad (8)$$

от m , полученного по данным измерений, будет свидетельствовать о наличии грубых ошибок в исходных данных или в результатах измерений. В нашем примере значения m' и m совпали, что свидетельствует об отсутствии таких ошибок. При обычной плоской засечке по трем пунктам установить это было бы невозможно. Преимуществом обратных пространственных угловых засечек следует считать и то, что одновременно с плановым положением точек они позволяют определять и высот-

ное. При этом значения высот находим с учетом коэффициентов вертикальной рефракции, весьма близких к действительным, что обеспечивает достаточную надежность их определения и позволяет вести наблюдения в любое время дня.

В отличие от однократных [2] многократные пространственные угловые засечки являются более универсальными и имеют решения при любых значениях углов наклона, в том числе и при углах, равных нулю. В последнем случае вследствие равенства нулю коэффициентов a_v и b_v в уравнениях (4) фактически получаем две самостоятельные задачи: обычную многократную угловую засечку в горизонтальной плоскости и многократную вертикальную угловую засечку, связанную с определением отметки точки и местного коэффициента вертикальной рефракции.

Проведенный анализ показал, что ощутимое повышение точности определения x , y и H в результате совместного уравнивания горизонтальных и вертикальных углов наблюдается уже при $v > 4^\circ$, особенно если определяемая точка находится вблизи от опасного круга. Однако для выявления грубых ошибок в конечных результатах совместное уравнивание горизонтальных и вертикальных углов целесообразно производить уже при $v > 1^\circ$. Это, в первую очередь, относится к случаям обратной угловой засечки по трем опорным пунктам.

Необходимые для обратных засечек координаты и высоты визирных целей, расположенных на высоких сооружениях, можно определять путем многократных прямых пространственных угловых засечек. Для этой цели можно использовать как парные, так и одиночные опорные пункты (рис. 2), прежде всего, наиболее близко расположенные к засекаемым точкам. Окончательные значения искомых величин в случае прямой засечки также можно найти по формулам (1).

Зависимость между измеренными и определяемыми величинами в случае прямой пространственной угловой засечки можно представить равенствами

$$\left. \begin{aligned} \beta_i &= a_{ip} - a_{i,i+1} = \arctg \frac{y - y_i}{x - x_i} - \arctg \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}; \\ \gamma_i &= a_{i,i-1} - a_{ip} = \arctg \frac{y_{i-1} - y_i}{x_{i-1} - x_i} - \arctg \frac{y - y_i}{x - x_i}; \\ \nu_i &= \arctg \frac{H - H_i - i - f_i}{S_i} = \arctg \frac{-H + H_i + i + f_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где β_i и γ_i — горизонтальные углы, измеренные на исходном пункте с номером i ; a_{ip} — дирекционный угол направления с опорной точки с номером i на определяемую.

В результате дифференцирования равенств (9) по искомым переменным получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_i}{\partial x} &= -\frac{\rho}{S_i} \sin \alpha_i = -A_i = a_{\beta_i}; \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial x} = \frac{\rho}{S_i} \sin \alpha_i = A_i = a_{\gamma_i}; \\ \frac{\partial \beta_i}{\partial y} &= \frac{\rho}{S_i} \cos \alpha_i = B_i = b_{\beta_i}; \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial y} = -\frac{\rho}{S_i} \cos \alpha_i = -B_i = b_{\gamma_i}; \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} &= -\frac{\rho}{S_i} \cos \alpha_i \operatorname{tg} v_i \cos^2 v_i \approx -B_i \operatorname{tg} v_i = a_{v_i}; \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} &= -\frac{\rho}{S_i} \sin \alpha_i \operatorname{tg} v_i \cos^2 v_i \approx -A_i \operatorname{tg} v_i = b_{v_i}; \\ \frac{\partial v_i}{\partial H} &= \frac{\rho}{S_i} \cos^2 v_i \approx \frac{\rho}{S_i} = c_{v_i}; \quad \frac{\partial v_i}{\partial q} = -\rho S_i \cos^2 v_i \approx -\rho S_i = d_{v_i}. \end{aligned} \quad (10)$$

В соответствии с равенствами (10) уравнения ошибок в случае прямой многократной пространственной угловой засечки можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} a_{v_i} \delta x + b_{v_i} \delta y + c_{v_i} \delta H + d_{v_i} \delta q + l_{v_i} &= v_{v_i}; \\ a_{\beta_i} \delta x + b_{\beta_i} \delta y &+ l_{\beta_i} = v_{\beta_i}; \\ a_{\gamma_i} \delta x + b_{\gamma_i} \delta y &+ l_{\gamma_i} = v_{\gamma_i}; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} l_{v_i} &= \arctg \frac{H_0 - H_i - i - f_0}{S_{0_i}} - v_i = v_{0_i} - v_i; \\ l_{\beta_i} &= \left(\arctg \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i} - \arctg \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right) - \beta_i = \\ &= (a_{0_{iP}} - a_{i,i+1}) - \beta_i; \\ l_{\gamma_i} &= \left(\arctg \frac{y_{i-1} - y_i}{x_{i-1} - x_i} - \arctg \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i} \right) - \gamma_i = \\ &= (a_{i,i-1} - a_{0_{iP}}) - \gamma_i. \end{aligned} \quad (12)$$

Число уравнений ошибок будет равно общему числу измеренных углов β , γ и v . Последующая обработка прямой засечки производится так же, как и обратной.

Следует отметить, что в случае прямой засечки коэффициент q из уравнивания может получаться менее надежным, так как время наблюдений для разных направлений будет разным. Однако, учитывая, что засекаются наиболее высокие местные предметы и, следовательно, визирные лучи по всем направлениям будут проходить достаточно высоко над земной поверхностью, можно ожидать, что и здесь коэффициенты q по всем направлениям будут близкими по величине друг к другу, независимо от времени наблюдений. Основанием для таких предположений могут служить исследования М. К. Дрока [1]. При большом числе направлений в засечках можно составлять группы направлений, близких по времени и условиям наблюдений, и определять из уравнивания для каждой группы свой коэффициент q . Например, в одну группу можно включать утренние и вечерние наблюдения, а во вторую — дневные; или составлять три группы направлений отдельно из утренних, дневных и вечерних наблюдений. Вообще говоря, определение коэффициентов q из уравнивания имеет смысл не только для получения более надежных коэффициентов вертикальной рефракции, но и потому, что их введение в уравнение позволяет частично исключать и некоторые систематические ошибки.

Эффективность многократных пространственных угловых засечек значительно возрастет, если для их обработки использовать электронно-вычислительные машины. С помощью ЭВМ можно не только ускорить обработку измерений, но и анализировать точность исходных данных, рассматривая их при уравнивании поочередно как неизвестные. В результате такого анализа можно выявить исходные пункты, содержащие наибольшие ошибки, и исключить их из уравнивания. Подобный анализ можно производить и по отношению к измеренным величинам. Таким образом, применение ЭВМ открывает перспективы оптимизации многократных пространственных засечек. Нами составлены и опробованы программы для обработки многократных прямых и обратных пространственных угловых засечек на ЭВМ М-222.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дрок М. К. Исследование влияния вертикальной рефракции при геодезическом нивелировании на малые расстояния. — Автореферат кандидатской диссертации, Львов, 1965.
2. Котов В. В. Обратная пространственная засечка по двум точкам. — «Геодезия и картография», 1973, № 1.
3. Ливанов М. Н. Инженерно-геодезическая съемка и составление исполнительных планов промышленных предприятий. М., Геодезиздат, 1958.
4. Петров М. К. Стенные знаки полигонометрии. Опыт внедрения нового в изыскательском производстве. Л., Лениздат, 1961.
5. Пятницкая М. П. Уравновешивание и оценка точности многократной засечки по вертикальным углам. — «Труды НИИГАиК», 1968, вып. 22.

6. Фролов П. П., Комаров В. Ф. К вопросу увеличения срока службы полигонометрических сетей на застроенных территориях. — «Геодезия и картография», 1971, № 6.

Работа поступила в редколлегию 4 апреля 1975 года. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Марийского политехнического института.
